< 6

Énfasis

PERSPECTIVAS EN LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Compiladora
Dora Inés Calderón

Autores
Bruno D'amore
Juan D. Godino
Dora Inés Calderón
Carlos Eduardo Vasco
Olga Lucía León
Adalira Sáenz Ludlow

Profesores Invitados
Carmen Batanero
Vicenç Font
Carlos Álvarez
Anna Athanasopoulou

Doctorado Interinstitucional en Educación DIE

Universidad del Valle
UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Doctorado Interinstitucional en Educación DIE

Universidad del Valle · Universidad Distrital Francisco José de Caldas · Universidad Pedagógica Nacional

Énfasis

Libros de los énfasis del

Doctorado Interinstitucional en Educación

Universidad Distrital
Francisco José de Caldas

Énfasis

Libros de los énfasis del Doctorado

Interinstitucional en Educación

Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas

Educación matemática

Dora Inés Calderón
(Compiladora)

Bruno D'Amore
Juan D. Godino
Dora Inés Calderón
Carlos Eduardo Vasco Uribe
Olga Lucía León
Adalira Sáenz Ludlow

Profesores invitados
Carmen Batanero
Vicenç Font
Carlos Alvarez
Anna Athanasopoulou

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Bogotá, Colombia - Agosto de 2012

Facultad de Ciencias y Educación
Doctorado Interinstitucional en Educación

ISBN: 978-958-8782-09-6
e-ISBN: 978-958-8782-89-8

Primera edición, 2012

Preparación Editorial
Doctorado Interinstitucional en Educación
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
http://die.udistrital.edu.co
eventosdie@distrital.edu.co

Fondo de publicaciones
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Cra. 19 No. 33-39. Piso 2.
PBX: (57+1) 3238400, ext. 6203

Corrección de estilo
Luisa Juliana Avella Vargas

Diagramación y diseño de carátula
Juan Camilo Corredor Cardona

Impreso en Javegraf

Bogotá, Colombia, 2012

Contenido

Índice de gráficas, tablas y figuras

Introducción

El énfasis de Educación Matemática del Doctorado Interinstitucional en Educación de las Universidades Distrital Francisco José de Caldas, del Valle y Pedagógica Nacional, presenta a la comunidad de profesores e investigadores esta obra como un aporte a la discusión de los desarrollos de este campo intelectual.

La obra compila resultados de investigación del los grupos inscritos en la Universidad Distrital, que son, respectivamente, el Grupo MESCUD[1] y el Grupo de Investigación Interdisciplinaria en Pedagogía del Lenguaje y las Matemáticas GIIPLyM[2]. Adicionalmente, para esta publicación se contó con la colaboración de cuatro investigadores invitados al grupo GIIPLyM; ellos son Carmen Batanero, doctora en Matemáticas y profesora de estadística y didáctica en la Universidad de Granada (España); Vicenç Font, doctor en Didáctica de las Matemáticas y profesor en la Universidad de Barcelona; Carlos Álvarez, doctor en Matemáticas, especialista en Historia de las Matemáticas y profesor en la Universidad Autónoma de México; y Anna Athanasopoulou, doctora en Educación Matemática y profesora de matemáticas en North Carolina.

La obra, como producto de investigación, tiene dos características: presenta resultados de las investigaciones realizadas en el marco de las líneas de los grupos referidos; en esa medida, se constituye en una muestra del desarrollo de tales líneas de investigación. A la vez, el conjunto de artículos compilados conforma un escenario en el que convergen distintas perspectivas en la investigación de la didáctica de las matemáticas; en este sentido, aporta a este campo de la didáctica.

Con base en las características señaladas, el libro se estructura en dos grandes partes: la primera dedicada a presentar *Elementos generales de la didáctica de las matemáticas* a través de tres artículos que, a nuestro juicio, amplían el abanico de elementos epistemológicos, pedagógicos y lingüísticos que pueden contribuir a la comprensión de la educación matemática en general.

1 Grupo *Matemáticas Escolares Universidad Distrital*-MESCUD, dirigido por los profesores Bruno D´Amore y Jaime Romero. Adscrito a Colciencias en categoría C.

2 El grupo es interinstitucional, adscrito a las Universidades Distrital Francisco José de Caldas y del Valle, y es dirigido por el profesor Carlos Eduardo Vasco. Adscrito a Colciencias en categoría A.

Abre esta primera parte el artículo *El debate sobre conceptos y objetos matemáticos: la posición "ingenua" en una teoría "realista" vs. el modelo "antropológico" en una teoría "pragmática"* de Bruno D´Amore. De manera sugerente, el autor ofrece un análisis de diferentes interpretaciones de los términos "concepto" y "objeto" en varios ámbitos conceptuales: las matemáticas, la historia de los pensamientos filosófico y psicológico, y en la reciente acepción "antropológica", mostrando que es necesario introducirse en una teoría *pragmática*. Según el autor, el panorama presentado en su artículo revela la importancia de que los estudios e investigaciones en educación matemática, y en particular en la práctica didáctica, identifiquen los problemas y las actividades que históricamente han llevado al surgimiento de toda "concepción", todo "objeto", toda "regla"; categorías fundamentales en la didáctica de las matemáticas. Cierra su disertación proponiendo, en todo este contexto educativo, la necesidad de establecer la real o presunta dependencia de sus categorías de contextos institucionales y las razones que emergen de estas relaciones.

El segundo artículo de esta primera parte es *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática* de Juan Díaz Godino, Carmen Batanero y Vicenç Font. De acuerdo con los autores, en este trabajo presentan una síntesis del modelo teórico sobre el conocimiento y la instrucción matemática, que vienen elaborando desde hace varios años. De su modelo destacan varios aspectos:

> *la articulación de las facetas institucionales y personales del conocimiento matemático, la atribución de un papel clave a la actividad de resolución de problemas, a los recursos expresivos y la asunción coherente de supuestos pragmáticos y realistas sobre el significado de los objetos matemáticos.*

La propuesta considera que el modelo de cognición matemática es un elemento clave sobre el que se basa el desarrollo de una teoría de la instrucción matemática significativa. Un valor de su modelo, consideran ellos, es permitir la comparación, articulación y unificación de diversas aproximaciones teóricas empleadas en didáctica de las matemáticas.

El tercer artículo, que cierra esta primera parte, es *El Lenguaje en las matemáticas escolares* de Dora Inés Calderón. La autora presenta elementos para la hipótesis de que *el lenguaje es un aspecto central en el aprendizaje de las matemáticas* y que, en este sentido, requiere ser considerado desde dos perspectivas complementarias: la discursiva y la sistémica. Destaca cómo en el escenario discursivo se da la configuración de los sujetos discursivos de las matemáticas escolares y constituye una esfera de la comunicación didáctica de las matemáticas, con su respectivo género discursivo. De igual manera presenta elementos para la comprensión del papel del lenguaje en la construcción del conocimiento matemático escolar, entendiendo con Pimm (1990) que las matemáticas son, además, un lenguaje y, como tal, constituyen un desarrollo del lenguaje natural.

La segunda parte de la obra se ha denominado *Elementos específicos en la didáctica de las matemáticas: experiencias para el aula*. Bajo este tema se compilan tres artículos que consideramos, aportan experiencias particulares con metodologías, herramientas o propuestas para trabajar en clase.

Abre este segunda parte el artículo *Experiencia interna y quehacer matemático* de Carlos Eduardo Vasco. De acuerdo con este tema, el autor se plantea un doble propósito:

> *considerar al menos tres tipos de experiencia interna relacionados con las reconstrucciones mentales espacio-temporales: geométrica, aritmética y lógica, y argumentar por qué parecen ser éstos los tres tipos mínimos necesarios (y tal vez suficientes) para iniciar y apoyar el avance del trabajo matemático de los niños, niñas y jóvenes, al menos en las ramas de las matemáticas que se han llamado la aritmética, la geometría y la lógica matemática.*

Así, a través de distintos casos, Vasco muestra cómo la geometría, la aritmética y la lógica se inician con experiencias internas que, según él, no deben ser llamadas "empíricas", por más que tengan su origen en la corporeidad-con-mente de los seres humanos, que experimentan como organismos consientes la sucesión de los eventos, el movimiento, la acción, la distribución espacial de variaciones perceptuales, el flujo de información en el pensamiento y en el diálogo, pero que pueden reconstruir, refinar, digitalizar y reorganizar esa experiencia empírica en una experiencia interna. En general, este artículo propone una profunda reflexión situada en la comprensión del aprendizaje y el desarrollo del saber matemático; pone de relieve la discusión sobre el carácter empírico de la experiencia matemática y la experiencia interna o "cuasi-empírica" en matemáticas. Así, le apuesta a "*la experiencia interna y a la intuición cultivada como lugar privilegiado de la creatividad matemática*".

El segundo artículo de esta parte es *La experiencia figural: algunas reflexiones sobre el papel de las figuras en la geometría plana* de Olga Lucía León y Carlos Álvarez. Siguiendo la línea que abrió Vasco en el artículo precedente, los autores reflexionan sobre "*un tipo de experiencia que puede realizar el sujeto a través de las figuras*". De acuerdo con el título del artículo, León y Álvarez presentan el análisis de la experiencia para el caso de la geometría plana o históricamente denominada geometría *euclidiana*. Centran su interés en el papel que juegan las figuras en tal experiencia y en el modo en que las figuras se inscriben en la demostración geométrica. Con esta base se intenta comprender el lugar que las figuras ocupan en las inferencias que, a partir de los axiomas, dan lugar al resto de proposiciones que forman el cuerpo de la geometría. Según los autores, este trabajo permite comprender el papel de las figuras en una geometría cuyo objeto no es la comparación entre las magnitudes geométricas, sino el estudio de la proporcionalidad y la semejanza. En este sentido concluyen que un trabajo de este tipo destina a la figura un papel cuyo aspecto *experimental* ha de ser analizado.

Cierra la segunda y última parte del libro el artículo *The GSP as a technical and psychological-symbolic tool: the case of a lateral entry teacher* de Adalira Sáenz-Ludlow y Anna Athanasopoulou. Como lo indican las autoras, se trata de un estudio preliminar a un experimento de enseñanza, en el que se conformó un equipo de participantes integrado por un estudiante de educación matemática, una aspirante a obtener su licenciatura para escuela media y dos maestras en ejercicio en la escuela secundaria. El propósito del experimento fue tratar de entender *cómo* maestros, que poseen cierto conocimiento de objetos geométricos, utilizan el programa *Geometer's Sketchpad* (GSP) para expandir y consolidar dicho conocimiento. Se aplicaron tareas semi-estructuradas especialmente diseñadas para el GSP con la intención de motivar la triada comunicativa entre el profesor, el *software* y el investigador, además de dar al profesor la libertad de explorar situaciones geométricas para generar conjeturas, investigarlas y luego probarlas. El análisis realizado durante el experimento permitió a las autoras observar el uso del GSP para resolver tareas cuyo objetivo era investigar varias propiedades de los trapecios isósceles. Observan cómo para uno de los actores participantes el programa no solamente es una herramienta técnica sino simbólica en el proceso de conceptualizar algunas de las propiedades de trapecios isósceles y la demostración geométrica de ellas.

Así pues, ponemos en consideración de la comunidad este conjunto de artículos como un espacio para la interlocución académica en torno a los problemas de la didáctica de las matemáticas.

PARTE I

El debate sobre conceptos y objetos matemáticos: la posición "ingenua" en una teoría "realista" vs. el modelo "antropológico" en una teoría "pragmática"

Bruno D'Amore[1]

Introducción

En este texto se analizan diferentes interpretaciones de los términos "concepto" y "objeto" en matemáticas, en la historia de los pensamientos filosófico y psicológico y en la reciente acepción "antropológica". Se muestra de esta manera, la necesidad de introducir una teoría pragmática como marco para la interpretación de estos términos.

Los conceptos: terminología difundida, filosófica y literaria

Acerca de la naturaleza de los conceptos se han escrito libros enteros y filósofos de primer nivel se han ocupado de este tema.[2] En los diccionarios de filosofía se hallan definiciones de "conceptos" bastante semejantes; tomo como ejemplo la siguiente, de tipo aristotélico: "*En general, todo procedimiento que haga posible la descripción, la clasificación y la previsión de los objetos conocibles*". Desde esta definición se puede notar que:

- el concepto es un proceso, es decir algo dinámico y no estático;
- puede haber conceptos de cualquier cosa, desde los objetos concretos (el concepto de *mesa*) hasta los abstractos (el concepto de *número 3*); desde los objetos reales hasta los irreales, inexistentes o imaginarios;
- existe diferencia entre *nombre y concepto*; baste pensar que diferentes nombres pueden ser pertinentes para el mismo concepto; además, que conceptos diferentes pueden circular bajo el mismo nombre.

En este punto surgen dos problemáticas fundamentales: la *naturaleza* del concepto y la *función* del concepto.

La pregunta acerca de la *naturaleza* del concepto ha tenido, en filosofía, respuestas diferentes que divido en dos clases:

1 El doctor D'Amore es director del Grupo Matemáticas Escolares de la Universidad Distrital FJC- MESCUD y profesor del Doctorado Interinstitucional en Educación de esta universidad. También es Responsable Científico del Grupo NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) y hasta septiembre de 2010 fue profesor de planta de la Universidad de Bologna (Italia).

2 Para la redacción de esta primera sección, me sirvo principalmente de D'Amore (1999-2006), cap. 6.

- el concepto es la *esencia* misma de las cosas y por lo tanto su esencia necesaria: eso por lo cual las cosas no pueden ser otra cosa que lo que son (aunque entre mil diversidades, obviamente, diría que esta idea, nacida con Sócrates y refinada por Aristóteles, ha tenido muchos seguidores hasta llegar a Husserl);
- el concepto es el *signo* del objeto, por lo que se halla con él en relación de significación (la idea es esencialmente estoica, pero fue retomada en la época medieval, remontándonos a Boecio y después a Abelardo, y aún en los siglos XVII al XIX en España y Portugal; pero fue hecha propia por los lógicos de inicios del siglo XX).

La pregunta acerca de la *función* del concepto ha dado lugar a dos concepciones fundamentalmente diferentes:

- de tipo *intencional:* el concepto tiene como objetivo expresar o revelar la sustancia de las cosas;
- de tipo *instrumental:* en este caso se tienen varios aspectos ulteriores:
  - el concepto es un instrumento para *describir* los objetos y permitir su *reconocimiento* (en la antigüedad los Epicúreos y los Estoicos; algunos filósofos de la ciencia en el siglo XX);
  - el concepto es un instrumento para *clasificar* los objetos en el modo más *económico* posible (a esta idea adhiere, por ejemplo, Mach; y aquí se desencadena la cuestión según la cual los conceptos científicos son pseudo-conceptos en el sentido de Benedetto Croce);
  - el concepto es un instrumento para *organizar* los datos de la experiencia en manera tal de poder establecer entre ellos *conexiones* de carácter lógico (idea aceptada por Duhem);
  - el concepto es un instrumento para *anticipar* (por ejemplo, aquí podemos citar a Dewey y a Quine, aunque por razones totalmente distintas).

Un modo completamente diferente de discurrir filosóficamente acerca de los conceptos es el de las escuelas francesa y alemana. Más que *definir* los conceptos, se busca analizar *cómo se forman* los conceptos. Tenemos entonces las siguientes distinciones:

- conceptos *a priori* o conceptos *puros* (de Kant): son los conceptos que no se obtienen de la experiencia: el concepto de unidad, de pluralidad etc.; tales ejemplos son tomados precisamente de Kant;
- conceptos *a posteriori* o *conceptos empíricos*: son nociones generales que definen clases de objetos dados o construidos; por ejemplo, el concepto de *vertebrado*, de *placer*, etc., se refieren a todos y solo a aquellos individuos que forman estas clases, sea que se les pueda aislar (*un gato*, tomado de la clase de los vertebrados) o no (como sería en el caso de *un placer*).

Esta es, por ejemplo, la posición asumida por André Lalande en su *Vocabulaire technique et critique de la philosophie* (PUF, París 1926).

Es claro, entonces, que se puede hablar en todo caso de *intensión* y de *extensión* de un concepto (recordando que pueden existir conceptos con extensión vacía...).

Pero, ¿qué quiere decir, etimológicamente, *concepto*? Su nombre latino (*conceptus*, de *concipere*) tiene una clara referencia al resultado del acto de la concepción o generación de la mente en su alejarse de la inmediatez de las impresiones sensibles y de las representaciones particulares y en su llegada a una significación universal. Pero entonces, se podría pensar en una coincidencia con la palabra *idea*; o se le podría hacer coincidir con el λόγος (el *verbum*, la palabra mental) o incluso con la *noción*.

Cada una de estas interpretaciones (y otras más) fueron sostenidas en el pasado por eminentes filósofos. Esto nos autoriza a confundir, de ahora en adelante, *concepto* con *idea*, aunque en la idea existe implícita también una especie de *representación*, mientras que el *concepto* podría también ser inmune a lo anterior.

Si se pasa a diccionarios de la lengua común, no filosóficos, editados en varios países, se halla, por ejemplo:

- "*Aquello que la mente entiende y comprende por medio de la observación, la reflexión y la inducción*"; a veces, además de *entiende* y *comprende,* se agrega también *concluye*;
- "*La criatura concebida - la cosa imaginada e inventada por nuestro intelecto*";
- "*Pensamiento que la mente forma derivado de dos o más ideas, partiendo de lo individual a lo general;* [pero también:] *idea, opinión*";
- "*Pensamiento, en cuanto concebido por la mente; más en particular: idea, noción que expresa los caracteres esenciales y constantes de una realidad dada que la mente se forma aferrando juntos (...) los varios aspectos de un determinado objeto que a la mente le interesa tener presentes en su totalidad*";
- "*Término filosófico referido en general al contenido lógico o al significado de los signos lingüísticos y de las imágenes mentales*".

Puede ser interesante, para nuestros objetivos introductorios, ver qué uso hacen de este término algunos literatos. Dante Alighieri usa conceptos en el sentido de concepciones en Paraíso 3-60; en este mismo sentido, se halla en muchos literatos de todos los países del mundo. Pero es claro que los literatos utilizan una palabra en el sentido más vasto posible, como además se hace –y es justo que se haga– en el lenguaje común, donde concepto indica también *opinión, modo de entender, principio, proyecto, intención, estimación, reputación*, etc., según sea la lengua.

Todo esto solo para testimoniar la enorme dificultad y las variaciones que se encuentran cuando se quiere enfrentar de manera significativa y un poco rigurosa una problemática que asigna un lugar primordial a una palabra para cuya definición se han empleado miles de años.

Los conceptos: terminología psicológica en la vertiente didáctica

Si queremos hacer progresos significativos y específicos, es necesario buscar textos más adecuados, más acordes con el espíritu del ámbito en el que nos queremos mover.

No puedo entonces dejar de recordar inmediatamente que L. S. Vigotsky (1960, 1962) trabajó durante mucho tiempo sobre la formación de los conceptos en el ámbito de su más vasto campo de investigación acerca de cómo influyen las causas sociales en las diferencias psíquicas de los individuos (la influencia del ambiente sobre las diferencias psíquicas). Él habla precisamente de desarrollo conceptual, distinguiendo esencialmente tres fases (pero el asunto es mucho más complejo y aquí lo dejo de lado):

- *fase de los cúmulos sincréticos*, caracterizada por la falta de una referencia objetiva estable;
- *fase del pensamiento por complejos*; en tal fase el sujeto tiende hacia un modo objetivo del pensamiento; el sujeto reconoce nexos concretos, pero no lógicos ni abstractos;
- *fase conceptual*; en tal fase el sujeto opera utilizando su capacidad de abstracción.

Vigotsky presta especial atención a la formación de los conceptos científicos, en particular a la de los de tipo escolar durante la infancia, evidenciando el anclaje que los niños hacen de tales conceptos a componentes concreto-figurativos, mucho antes que a los componentes lógicos o abstractos; parece ser que tal prioridad es necesaria para la "fundación" misma del concepto. A propósito del orden en la adquisición de los conceptos, Vigotsky (1962) hace una célebre afirmación, a primera vista paradójica, según la cual los conceptos científicos se desarrollan *antes* que los espontáneos; dice también "*si el programa proporciona el material adecuado*"; en resumen: la supuesta necesidad infantil de anticipar una fase empírica de aprendizaje a una abstracta no parece ser así necesaria. [Regresaremos a los conceptos científicos y a Vigotsky en la sección 4].

Pero entonces se puede poner en discusión la posición de J. Bruner (1964), aquella de la célebre terna de los modos de representación de los conceptos:

- *ejecutiva (o "enactiva"),*
- *icónica,*
- *simbólica*

que, dicho sea de paso, se refería precisamente a las matemáticas.

Pongamos un ejemplo muy famoso: la adquisición del concepto de medida por parte de niños con edad entre los tres (3) y los cinco (5) años, y contrapongamos las modalidades de Piaget a las de un famoso miembro de la escuela soviética: Gal'perin.

- En la descripción que hacen Piaget, Inhelder y Szeminska (1948) del aprendizaje espontáneo del concepto de medida, al niño se le proponen situaciones empíricas en las que se pide medir, hasta llegar a un concepto abstracto, respetando la teoría de los estadios evolutivos. El comportamiento del niño seguiría un famoso *recorrido*, muy difundido aún hoy en el nivel preescolar y en el primer ciclo de la escuela elemental –no solo italiana–: medidas espontáneas con pseudo-unidades de medida, predominancia de la actividad perceptiva; elección más cuidadosa de la unidad de medida, capacidad de llevar más veces la unidad; conciencia de la conservación de las magnitudes (y de las medidas). Como podrá notarse, abundancia de terminología típicamente piagetiana.
- La prueba de Gal'perin (1969) relaciona más la medición con la idea de número, basándose incluso en ideas fundacionales de A. N. Kolmogorov. La primera etapa es la de llegar a la idea de unidad; después, al hecho de que la medida con respecto a una unidad dada es un número que puede ser recordado incluso sin conocer su nombre, simplemente poniendo aparte un palito o un botón cada vez que se usa dicha unidad; en este punto la medida se hace coincidir con el número de veces que se usó la unidad (el ejemplo propuesto es llenar un balde con vasos de agua para estimar su capacidad); y para terminar, reconocimiento y aceptación de la relatividad del número-medida con respecto a la unidad utilizada.

Me parece que todo esto explica bien la obstinación y el interés con el que los más famosos teóricos del aprendizaje conceptual se han interesado en este tema y contribuye a explicarnos qué entienden ellos por *concepto,* al menos en el ámbito del aprendizaje cognitivo.

¿Se *deben* enseñar los conceptos? ¿Se *pueden* aprender los conceptos? Más aún: ¿tienen sentido estas preguntas?

Las precedentes son cuestiones cardinales sobre las cuales se necesita reflexionar y que algunos autores toman demasiado a la ligera.

Esta problemática se desarrolló alrededor de los años 60, sobre todo en los países de lengua anglosajona, en el vastísimo movimiento internacional de renovación de los currículos que se dio en todo el mundo, provocado por la gran revalorización educativa de los contenidos de las varias disciplinas, en particular de las ciencias y, específicamente, de las matemáticas. En este sentido, ciertamente un artífice del viraje mundial fue J. Bruner.[3] Como consecuencia, esto llevó a un profundo debate acerca de los currículos, sobre todo en lo relativo al sector de las ciencias en general y de la matemática en particular.

Lo resumo en seguida, comenzando por esta pregunta, preliminar a las precedentes: ¿hacia *qué* se debe educar, cuando en la Escuela se hace ciencia?

Existen dos posibles respuestas:

- hacia el *método científico*: el objetivo es el de proporcionar dominio de la metodología;
- hacia la adquisición y dominio de los *conceptos esenciales* de la ciencia.

El debate no es nuevo; la primera respuesta se puede conectar con el *método de la inteligencia* de John Dewey (1933), pero los años 60 fueron testigos de un encendido debate interior, del cual tuvieron vida fácil todos aquellos que propugnaron ideas didácticas bastante bien diseñadas.[4]

En este debate se inserta bien otro tipo de propuesta, la de Gagné (1965-1985), que tiende a separar la didáctica de los conceptos *concretos* de la de los *abstractos*; la concretez y la abstracción deben verse en relación a la cualidad de referencia de los objetos considerados en los conceptos:

- si se trata de conceptos derivados de la observación empírica de los objetos, se trata de conceptos concretos;
- si se trata de conceptos derivados de definiciones y que implican por lo tanto relaciones abstractas, se trata de conceptos abstractos.

3 Para entender el porqué, véase Tornatore (1974), cap. 9.
4 Para profundizar sobre el debate, puede verse Pontecorvo (1983, pp. 262-263).

Gagné elabora una teoría de las jerarquías de aprendizaje en cuya cúspide se hallan los conceptos abstractos como punto culminante. Esta idea de las jerarquías empuja a muchos otros autores a idear jerarquías semejantes, siguiendo otros parámetros; en particular, estoy pensando en los trabajos de Klausmeier, Gathala y Frayer (1974) y Klausmeier (1979, 1980), que dividen el aprendizaje de los conceptos de la escuela primaria en 4 niveles:

- *nivel concreto:* el niño reconoce un objeto ya visto, en la misma situación;
- *nivel de identidad:* el niño reconoce un objeto ya visto, pero en condiciones diferentes;
- *nivel de clasificación*: el niño reconoce que dos cosas son semejantes por un cierto aspecto y, generalizando, las clasifica juntas, aunque no sean claros los criterios de la clasificación;
- *nivel formal*: el niño sabe dar un nombre a la clase obtenida en el tercer nivel, es decir, al concepto seleccionado de los atributos que le han permitido la clasificación.[5]

Por lo que parece que el estudio de cómo se desarrollan los conceptos tiene que ver, sobre todo, con la etapa que va de los 3 a los 10 años de edad y que es necesario entrelazar esta investigación con la investigación didáctica. Entonces, el desarrollo de los conceptos y el aprendizaje se hallan muy relacionados entre sí.

¿Se puede llegar a pensar que el punto culminante de la ontogénesis sea la organización del conocimiento por categorías? Según Luria (1982), los métodos utilizados en este sentido, desde su punto de vista, son los siguientes:

- *método de la definición del concepto*: se pide responder de manera espontánea y libre a preguntas del tipo "¿Qué es?"; las respuestas pueden ser específicas, es decir, referidas a una cierta particularidad, o de tipo categorial;
- *método de la comparación-diferenciación*: dados dos objetos diferentes pero con alguna diferencia en común, se pide decir cuáles son las características comunes y las diferencias;
- *método de la clasificación*: se dan varios objetos y se pide clasificar un subconjunto formado por aquellos objetos que tienen una característica en común;
- *método de la formación de los conceptos artificiales*: se regresa a Vigotsky; el experimentador ha preordenado todo para llegar a un concepto bien establecido que se quería alcanzar.

5 Mayores clarificaciones, relaciones entre los niveles de Klausmeier, las fases de Gagné y los estadios de Piaget, así como ejemplos de aplicaciones didácticas, pueden hallarse en Pontecorvo (1983).

Debo decir que no se puede estar en desacuerdo con Cornu y Vergnioux (1992, pp. 55-56) cuando afirman: "*El aprendizaje de un concepto aislado es imposible, dado que todo concepto se halla en correlación con otros. Se debe hablar entonces de entramados conceptuales*". Sobre este punto tendremos que regresar dentro de poco (y remito a D'Amore, 1999-2006).

El papel del lenguaje en el aprendizaje y en la formulación de los conceptos

En todo esto, es evidente que el lenguaje juega un papel de extraordinaria importancia. Es bien sabido que la posición de Piaget se dirige hacia "*una progresiva devaluación cognitiva del lenguaje*" (Pontecorvo, 1983, p. 292); esto:

> *debe verse en relación con la toma de posición de Piaget contra toda concepción que ve en la comunicación social a través del lenguaje el origen del pensamiento y contra toda concepción que asimile los sistemas lógicos a los sistemas lingüísticos (...) El pensamiento, insiste Piaget, no tiene origen en el lenguaje (...); la "estructura" de un sistema operatorio no es la estructura de un sistema de signos, sino la estructura de un sistema de "acciones interiorizadas"* (Tornatore, 1974, p. 137).

Esta es la razón por la que Piaget toma la siguiente posición:

- la imagen es un significante cuyo objetivo es el de designar objetos figurativamente;
- el concepto es un significado que tiene como función la de especificar caracteres constitutivos del objeto con respecto a otros términos de la misma clase (y no de nombrarlo);
- la palabra –signo verbal que designa al concepto– no agrega nada en lo que respecta al conocimiento, al concepto mismo.

Muy diferente es la posición de Vigotsky (1962), quien en cambio ve el lenguaje como mediador entre individuo y cultura; él afirma que la formación de un concepto se da con una operación intelectual que está "*guiada por el uso de las palabras que sirven para concentrar activamente la atención, para abstraer ciertos conceptos, sintetizarlos y simbolizarlos por medio de un signo*" (p. 106). Por lo que la organización cognitiva del niño recibe, gracias al lenguaje, una dimensión que le es propia, arraigada desde su comienzo: la dimensión *social*. Si es verdad que el niño aprende a categorizar en la relación lingüística con el adulto, es también verdad que formas embrionarias de categorización deben estar ya presentes *antes* del arreglo adulto definitivo de ellas. Vigotsky establece entonces una comparación entre conceptos espontáneos (o cotidianos) y conceptos científicos:

- los primeros tienen la característica de ser relativos a la experiencia personal;
- los segundos son ya parte de un sistema de conceptos; la escuela tiende, como efecto sobre las capacidades del niño, a dar un orden a los conceptos que él ya posee y que adquiere poco a poco.

Una posición en verdad revolucionaria, y sobre la cual se funda gran parte de la didáctica de hoy en día.

Quiero cerrar esta rapidísima exploración acerca de lenguaje y aprendizaje de los conceptos recordando, entre muchos otros, los estudios de Nelson (1974, 1977). Como ya he evidenciado, el concepto, al menos desde el punto de vista del aprendizaje cognitivo, se interpreta hoy como algo más vasto, no exclusivamente ligado a las categorías, a las clases, etc. El concepto se halla, para Nelson (1977), conectado a una adquisición de conocimiento cualquiera, siempre y cuando esta sea "*definida e incorporada en un contexto o en un sistema*". Por lo que, independientemente del grado de generalidad o de abstracción, lo que cuenta es que exista un marco de referencia, una red de relaciones: "*los conceptos necesariamente existen al interior de un entramado o marco* (framework) *conceptual*" (Nelson, 1977).

Se vuelve entonces decisivo para el aprendizaje de un concepto, un mapa de conocimientos referidos, por ejemplo, a un objeto. El caso propuesto por la misma autora se refiere al término "bola" en una experiencia con un niño de 12 meses: la red de relaciones que gira alrededor de la palabra "bola" es relativa al lugar donde fue vista, a las actividades que otras personas o que el mismo niño hacen con ella, a cuáles son las características funcionales del objeto y los lugares en los que todo esto puede suceder, etc., por lo que el objeto se halla ligado a toda una red relacional, cuyo complejo termina con constituir el concepto; y, como se observa, la *palabra* tiene un papel decisivo. Con el pasar del tiempo, el niño agregará a esta primera formación del concepto otros atributos, otras funciones, etc., de modo que el concepto podrá contener elementos funcionales, relacionales, perceptivos, *descriptivos*, incluso el término que lo designa, tanto individual como colectivamente. Es también obvio que aquí existe una relación muy fuerte con los guiones (*scripts)*, pensados como marcos de referencia más amplios, al interior de los cuales se pueden colocar y situar estos conceptos en las varias fases en las que evolucionan y se presentan. Todo esto permite reconocer las características identificables del concepto, en manera tal de poder después reconocer nuevos ejemplares que puedan compartir el *nombre* con el precedente.

Pero el punto final es aquel en el que, no obstante saber guiones (*scripts*) diferentes, el sujeto logra, como se usa decir, "supercategorizar":

> *Tanto las categorías como los guiones pueden ofrecer marcos de referencia para los mismos conceptos: en efecto, no existe ninguna razón por la cual conceptos introducidos en uno o en otro contexto sean diferentes en el contenido o en la estructura. Por ejemplo: los osos pueden ser parte del guión relativo al zoológico o ser parte de una categoría taxonómica relativa a los animales* (Nelson, 1977, p. 223).

Piénsese cómo estas reflexiones se hallan bajo los ojos de todos en la actividad de didáctica de la matemática, cuando el mismo concepto, introducido dentro de un guión particular, no se acepta cuando se halla en una categorización diferente.

Este es el problema: ¿Qué es lo que vuelve difícil la comprensión de los conceptos? ¿Cuál es el nivel en el que existen dificultades de comprensión de los conceptos? Existen múltiples respuestas. Para empezar, los diferentes niveles de formación de los conceptos –estudios sobre este punto son más frecuentes en el mundo de la didáctica de las ciencias naturales (Giordan, De Vecchi, 1987; Astolfi, Develay, 1989) y de la historia (Clary, Genin, 1991)–, y después, la existencia de objetivos-obstáculo (Meirieu, 1987; Astolfi, Develay, 1989). Pero sobre este tema no entramos en profundidad.

Las definiciones de concepto y de esquema dadas por Vergnaud

Gérard Vergnaud, en múltiples ocasiones, ha afrontado la problemática de distinguir y definir las ideas de concepto y de esquema. Después de haber declarado que el conocimiento racional debe ser de tipo operatorio, define esquema como "*la organización invariante del comportamiento para una clase de situaciones dadas*" (Vergnaud, 1990).

En particular, muchos de sus ejemplos son tomados del ámbito de las matemáticas:

- la numeración de una pequeña colección de objetos, por parte de un niño de 5 años, necesita de la aplicación de un esquema que le permita coordinar movimientos de ojos y manos, y de coordinar con ellos la secuencia numérica; en particular, existe la constante significativa de un comportamiento de tipo esquemático en la repetición del último numeral, pronunciado con tono diferente;
- la solución de ecuaciones lineales por parte de adolescentes, desde su punto de vista sigue un esquema, una organización invariante;

- la ejecución de la adición de números naturales en columna sigue un esquema ya aceptado;

Según Vergnaud, si se analiza críticamente la dificultad de los alumnos en la resolución de tareas matemáticas –por ejemplo niños que intentan resolver problemas de aritmética–, es necesario examinar en términos de *esquemas* la elección de los datos por usar, así como la elección de las operaciones, especialmente cuando existan varias opciones posibles. Incluso los procedimientos heurísticos no serían otra cosa más que esquemas. Él introduce, en este punto, la idea de "concepto-en-acto" y de "teorema-en-acto"; se trata de "*los conocimientos contenidos en los esquemas: se pueden incluso designar con la expresión más inclusiva de 'invariantes operatorios*'" (Vergnaud, 1990).

Según Vergnaud, existen tres tipos lógicos de invariante operatorio:

- invariantes del tipo *proposición*, aquellos a los que se asigna la atribución de ser verdaderos o falsos;
- invariantes del tipo *función proposicional*, con el que podemos entender una expresión que contiene una o más variables individuales tales que, cuando en lugar de éstas se ponen constantes individuales, se obtiene una proposición;
- invariantes del tipo *argumento*, que pueden ser objetos, relaciones, proposiciones, funciones proposicionales u otra cosa: se trata sustancialmente de requerimientos de variables o ejemplos de funciones proposicionales o proposiciones mismas.

Regresemos a los conceptos. Según Vergnaud, el punto decisivo en la conceptualización de lo real y en la didáctica es el paso de los *conceptos-como-instrumento* a los *conceptos-como-objeto*, y una operación lingüística esencial en esta transformación, es precisamente la nominalización. Esto se podría resumir en una sola palabra: *conceptualización*. Es entonces fundamental, irrenunciable, dar una definición pertinente y eficaz de *concepto*; en varias obras, aunque con pequeñísimas variaciones, Vergnaud sugiere una que podemos ilustrar como sigue:

Un concepto C es una terna de conjuntos:

$$C = (S, I, S)$$

donde:

- S es el conjunto de las situaciones que dan sentido al concepto (*el referente*);
- I es el conjunto de los invariantes sobre los que se basa la operatividad de los esquemas *(el significado)*.

- S es el conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, las situaciones y los procedimientos de tratamiento (*el significante*).

Según Vergnaud, estudiar cómo se desarrolla y cómo funciona un concepto significa considerar estos tres “planos” separadamente y en mutua relación recíproca.

El viraje “antropológico”: significado institucional y personal de los objetos matemáticos

Pero, ya a partir de los años 70, las preguntas acerca de la naturaleza cognitiva de los conceptos matemáticos y del significado de los objetos matemáticos tomaron una dirección diferente. Declaraba Dummett en 1975:

> *Una teoría del significado es una teoría de la comprensión; es decir: aquello de lo cual una teoría del significado debe dar cuenta es aquello que se conoce cuando se conoce el lenguaje, es decir, cuando se conocen los significados de las expresiones y de los discursos del lenguaje* (Dummett, 1975).

Pocos años después, en 1980, se preguntaba Brousseau “¿Cuáles son los componentes del significado, deducibles del comportamiento matemático, que se observan en el alumno? ¿Cuáles son las condiciones que llevan a la reproducción de un comportamiento manteniendo el mismo significado?” (Brousseau, 1981). ¿No será, por casualidad, que existe una “variedad didáctica” del concepto de sentido, específica para la matemática, jamás estudiada, jamás evidenciada hasta ahora, en lingüística o en psicología? (Brousseau, 1986).

La acentuación de la necesidad de estudios sobre los conceptos centrados en los procesos de aprendizaje la da también Sierpinska (1990):

> *Comprender el concepto será (…) concebido como el acto de adquirir su significado. Tal acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados en relación con elementos particulares de la “estructura” del concepto (la “estructura” del concepto es la red de significados de los enunciados que hemos considerado). Estos significados particulares deben ser adquiridos con actos de comprensión. (...) La metodología de los actos de comprensión se preocupa principalmente del proceso de construir el significado de los conceptos.*

Nos hallamos frente a la necesidad de dar luz a la naturaleza del significado, comparando dos categorías diferentes en las que pueden dividirse las teorías: realistas (o figurativas) y pragmáticas (división ya aparecida en Kutschera, 1979).

En las teorías realistas, el significado es "*una relación convencional entre signos y entidades concretas o ideales que existen independientemente de los signos lingüísticos; como consecuencia suponen un realismo conceptual*" (Godino, Batanero, 1994). Como ya afirmaba Kutschera (1979), "*según esta concepción el significado de una expresión lingüística no depende de su uso en situaciones concretas, sino que más bien sucede que el uso se apoya en el significado, siendo posible una división neta entre semántica y pragmática*".

En la semántica realista que resulta, se atribuyen a las expresiones lingüísticas funciones puramente semánticas: el significado de un nombre propio (como "Bertrand Rusell") es el objeto que tal nombre propio indica (en tal caso Bertrand Rusell); los enunciados atómicos (como "A es un río") expresan hechos que describen la realidad (en tal caso A es verdaderamente el nombre de un río); los predicados binarios (como "A lee B") designan atributos, aquellos indicados por la frase que los expresa (en este caso la persona A lee la cosa B). Por lo que toda expresión lingüística es un atributo de cierta entidad: la relación nominal que se deriva es la única función semántica de las expresiones. Se reconocen aquí las posiciones de Frege, de Carnap y del Wittgenstein del *Tractatus*.

Una consecuencia de esta posición es la admisión de una observación científica (por lo que al mismo tiempo es empírica y objetiva o intersubjetiva), como podría ser, en un primer nivel, una lógica de los enunciados y de los predicados.

Desde el punto de vista que aquí nos interesa más, si aplicamos los supuestos ontológicos de la semántica realista a la matemática, se obtiene necesariamente una visión platónica de los objetos matemáticos: en ella nociones, estructuras, etc., tienen una existencia real que no depende del ser humano, en la medida en que pertenecen a un dominio ideal; "conocer" desde un punto de vista matemático significa descubrir entes y sus relaciones en tal dominio. Y es también obvio que bajo esa perspectiva, implica un absolutismo del conocimiento matemático en cuanto sistema de verdades seguras, eternas, no modificables por la experiencia humana, dado que la preceden o, al menos, le son extrañas e independientes. Posiciones de este tipo, aunque con diferentes matices, fueron sostenidas por Frege, Rusell, Cantor, Bernays, Gödel…; y hallaron violentas críticas, como el convencionalismo de Wittgentsein y el cuasi-empirismo de Lakatos (véanse Ernest, 1991 y Speranza, 1997).

En las teorías pragmáticas, las expresiones lingüísticas tienen significados diferentes según sea el contexto en el que se usan, por lo que resulta imposible toda observación científica, dado que el único análisis posible es "personal" o subjetivo, circunstanciado y no generalizable. No se puede hacer otra cosa que examinar los diferentes "usos": el conjunto de los "usos", en efecto, determina el significado de los objetos. Se reconocen aquí las posiciones del Wittgenstein de las *Investigaciones filosóficas,* cuando admite que la significatividad de una palabra depende de su función en un "juego lingüístico", dado que en él tiene un modo de 'uso' y un fin concreto para el cual ha sido usada: por lo que la palabra no tiene por sí misma un significado, y sin embargo puede ser significativa. Desde la perspectiva anterior, los objetos matemáticos son símbolos de unidad cultural que emergen de un sistema de utilizaciones que caracterizan las pragmáticas humanas (o, al menos, de grupos homogéneos de individuos) y que se modifican continuamente en el tiempo, dependiendo también de las necesidades. De hecho, los objetos matemáticos y el significado de tales objetos dependen de los problemas que se enfrentan en matemáticas y de los procesos de su resolución.

	Teorías "realistas"	**Teorías "pragmáticas"**
Significado	Relación convencional entre signos y entidades concretas o ideales, independientes de los signos lingüísticos.	Depende del contexto y del uso.
Semántica vs. pragmática	División neta.	Sin división o división matizada.
Objetividad o intersubjetividad	Total.	Faltante o discutible.
Semántica	Las expresiones lingüísticas tienen funciones puramente semánticas.	Las expresiones lingüísticas y las palabras tienen significados "personales", son significativas en oportunos contextos, pero no tienen significados absolutos por sí mismas.
Análisis	Posible y lícito, por ejemplo, la lógica.	Sólo es posible un análisis "personal" o subjetivo, no generalizable, no absoluto.
Visión epistemológica consecuente	Concepción platónica de los objetos matemáticos.	Concepción problemática de los objetos matemáticos.

	Teorías "realistas"	Teorías "pragmáticas"
Conocer	Descubrir.	Usar en oportunos contextos.
Conocimiento	Es un absoluto.	Es relativo a la circunstancia y al uso específico.
Ejemplos	Witgenstein en el *Tractatus*, Frege, Carnap [Rusell, Cantor, Bernays, Gödel].	Witgenstein en las *Investigaciones Filosóficas* [Lakatos].

En la dirección pragmática, se entiende la definición de Chevallard (1991) de objeto matemático:

> *un emergente de un sistema de praxis donde se manipulan objetos materiales que se descomponen en diferentes registros semióticos: registro oral, de las palabras o de las expresiones pronunciadas; registro gestual; dominio de las inscripciones, es decir aquello que se escribe o se dibuja (gráficas, fórmulas, cálculos…), se puede decir, registro de la escritura.*

Siendo el "praxema" un objeto material ligado a la praxis, el objeto es entonces un "*emergente de un sistema de praxemas*". En esta acepción, ya no tiene mucho interés la noción de significado de un objeto sino más bien la de *rapport á l'objet*, relación con el objeto. Sobre tal idea se apoya la construcción que Chevallard hace de su "teoría del conocimiento", o mejor dicho de su "antropología cognitiva", al interior de la cual se puede situar la didáctica.

Pero entonces es central la persona (o la institución, como conjunto de personas) que se pone en relación con el objeto, y no el objeto en sí:

> *Un objeto existe desde el momento en el que una persona X (o una institución I) reconoce este objeto como existente (para ella). Más exactamente, se dirá que el objeto O existe para X (respectivamente para I) si existe un objeto, representado por R (X, O) [respectivamente R (I, O)] llamado relación personal de X a O (respectivamente relación institucional de I a O)* (Chevallard, 1992).

Esta posición ha marcado un viraje interesante al interior de los marcos teóricos en los que se sitúa toda investigación en didáctica de la matemática, tanto más si se subrayan los sucesivos estudios llevados a cabo por otros autores, para clarificar y volver operativas las nociones de Chevallard, creando instrumentos conceptuales adecuados y paragonándolos a aquellos propuestos por otras posiciones al respecto.

Por ejemplo, una claridad proviene de los estudios de Godino y Batanero (1994), porque en ellos se definen de manera rigurosa todos los términos de la cuestión: qué significa "práctica", qué es una "práctica personal", qué es una "institución", que es una "práctica institucional", qué diferencia existe entre objetos personales e institucionales y cómo se define cada uno de ellos, qué son los significados de un objeto personal y de un objeto institucional, qué relaciones existen entre significado y comprensión… Uno de los méritos del trabajo al que remito, consiste tanto en haber dado claridad terminológica como en haber proporcionado ejemplos adecuados, así como el poner en evidencia semejanzas y diferencias entre varias teorías del significado.

Para querer dar, de una sola vez, una característica de tal posición, en la formulación de Chevallard-Godino-Batanero lo esencial es la actividad de las personas puestas frente a la resolución de campos de problemas (fenomenologías), de las que emergen los objetos (conceptos, enunciados, relaciones, teorías etc.), los cuales son relativos a los contextos institucionales y personales. Tales contextos quedan definidos según los campos de problemas que se enfrenten y los instrumentos semióticos disponibles. Dentro de poco deberé regresar a esta posición, con ejemplos significativos.

Aún una nota. Para explicar el énfasis con el que se tratan los fenómenos típicos de la cognición humana en el trabajo de Godino y Batanero (1994), conviene resaltar que, mientras en el texto de Chevallard (1992) se da mayor peso al contexto institucional con respecto al personal, Godino y Batanero tienden a privilegiar la "esfera de lo mental", del sujeto humano, para intentar un equilibrio entre los dos contextos y para evitar que la esfera de lo personal sea ocultada por el campo institucional.

Algunas precisiones antes de proseguir[6]

En esta sección haré algunas precisiones terminológicas, consideraciones complementarias y notas cautelares.

A veces en matemática se habla de "conceptos"; a veces de "objetos". ¿Qué diferencia existe? Podría ser el resultado de un hábito de los matemáticos, pero se trata en cambio de un motivo bien fundado, dado que se basa sobre los siguientes tres puntos:

- todo concepto matemático remite a "no-objetos" desde el punto de vista del realismo ingenuo; por lo que la conceptualización no es y no se puede

6 Para la redacción de esta sección me sirvo de D'Amore (2001).

basar en significados que se apoyen en la realidad concreta, dado que en matemática no son posibles referencias ostensivas;

- todo concepto matemático se ve obligado a servirse de representaciones, dado que no existen "objetos" por exhibir en su nombre o en su evocación;[7] por lo que la conceptualización debe pasar necesariamente a través de registros representativos que, por varios motivos, sobre todo si son de carácter lingüístico, no pueden ser unívocos, por lo que, en matemática, no existe acceso sensible (vista, tacto…) directo a los "objetos", sino solo a sus representaciones semióticas en diferentes registros lingüísticos;
- se habla más frecuentemente en matemática de "objetos matemáticos" y no de conceptos matemáticos por cuanto en matemática se estudian preferentemente objetos más que conceptos: "*la noción de objeto es una noción que no se puede no utilizar desde el momento en el que nos cuestionamos acerca de la naturaleza, de las condiciones de validez o del valor del conocimiento*" (Duval, 1998).

En el camino trazado por Duval, la noción de concepto –preliminar o prioritaria en casi todos los autores– se vuelve secundaria, mientras que lo que adquiere carácter de prioridad es la pareja (signo, objeto), lo que lleva a la llamada paradoja cognitiva del pensamiento matemático, que presentaré más adelante y que fue evidenciada precisamente por Duval (1993).[8] El mismo autor (1996) cita un pasaje de Vigotsky en el que sustancialmente se declara que no existe concepto sin signo:

> *Todas las funciones psíquicas superiores se hallan unidas por una característica común superior, la de ser procesos mediados, es decir, la de incluir en su estructura, como parte central y esencial del proceso en su conjunto, el empleo del signo como medio fundamental de orientación y de dominio de los procesos psíquicos. El elemento central [del proceso de formación de los conceptos] es el uso funcional del signo o de la palabra como medio que permite al adolescente someter a su poder las propias operaciones psíquicas, dominar el curso de los propios procesos psíquicos* (Vigotsky, 1962; en la ed. francesa, 1985, pp. 150, 151, 157).

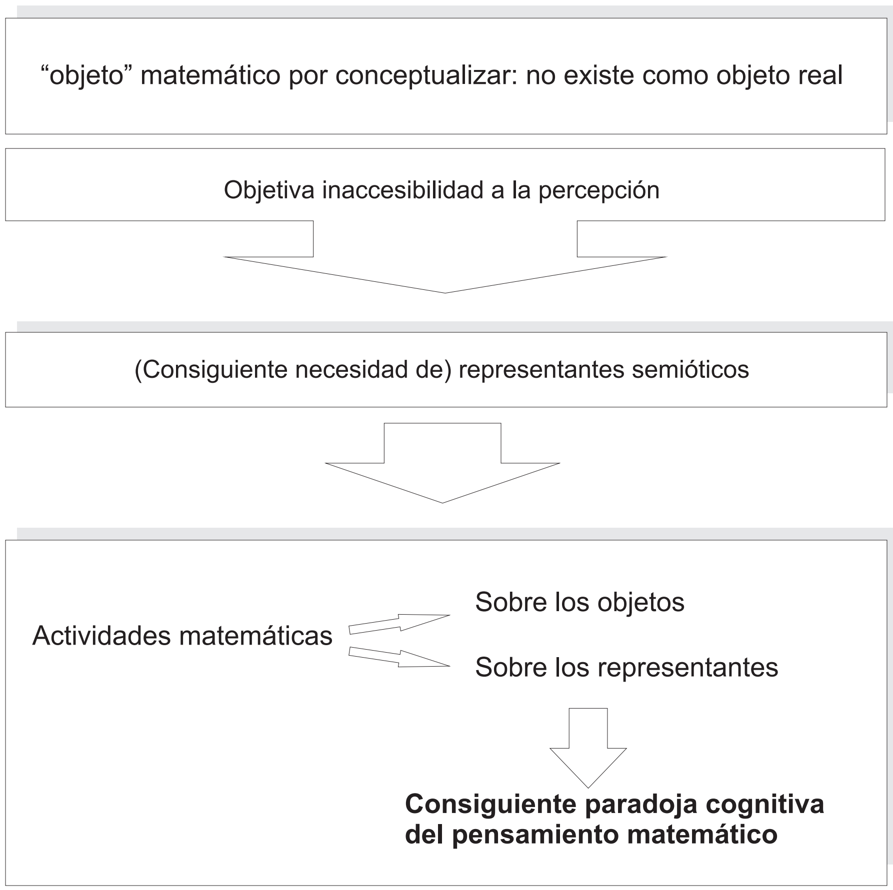
Es obvio que si se pone el acento sobre la pareja *(signo, objeto)*, todas las representaciones tríadicas (de C. S. Peirce, de G. Frege, de C. K. Ogden y I. A. Richards) caen en defecto.[9]

7 Aquí "objeto" es ingenuamente entendido en el sentido de "objeto real" o de "cosa". Cuál sea el significado de esta palabra ("cosa") se expresa en la *Metafísica* de Aristóteles, cuando afirma que la "cosa", en cuanto parte de lo real, es aquello que presenta las tres características siguientes: (1) tridimensionalidad; (2) accesibilidad sensorial múltiple (es decir simultáneamente por parte de más de un sentido) independientemente de las representaciones semióticas; (3) posibilidad de separación material y de otras partes de la realidad, desde otras "cosas".

8 Pero los primeros trabajos de Duval sobre este argumento son de 1988 (Duval, 1988a, b, c).

9 Véase D'Amore (2001) para un tratamiento más completo.

Resumo parte de lo ya dicho, interpretando a Duval (1993) en el siguiente esquema:



Veamos ahora en qué consiste esta *paradoja cognitiva del pensamiento matemático*, que tiene fuertes repercusiones cognitivas (Duval, 1993, p. 38):

> *por una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, por otra parte, solo por medio de representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo los sujetos en fase de aprendizaje podrían dejar de confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos sólo pueden tener relación con las solas representaciones semióticas? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de toda representación semiótica, vuelve la confusión casi inevitable. Y, por el contrario, ¿cómo pueden ellos adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados a las representaciones semióticas, si no tienen ya un*

aprendizaje conceptual de los objetos representados? Esta paradoja es aún más fuerte si se identifican actividades matemáticas y actividades conceptuales, y si se consideran las representaciones semióticas como secundarias o extrínsecas.

En esta paradoja, tan bien evidenciada por Raymond Duval, se puede esconder una potencial causa de falta de devolución, como traté de demostrar antes (D'Amore, 2001). El problema principal, para decirlo brevemente, está en el hecho de que según el maestro, según la noosfera y según el mismo estudiante, este último está entrando en contacto con un "objeto" matemático; pero, de hecho, y a veces nadie parece darse cuenta, el estudiante está entrando en contacto solo con una representación semiótica particular de ese "objeto". El estudiante no tiene –no puede tener– acceso directo al "objeto", y el maestro y la noosfera tienden a no separar el objeto de su representación; el estudiante se queda como bloqueado, como inhibido: no puede hacer nada más que confundir el "objeto" con su representación semiótica porque no se da cuenta, porque no lo sabe. Su relación personal con el saber tiene como "objeto" una cosa borrosa, confusa. Y por lo tanto, frente a una sucesiva necesidad conceptual que se manifiesta, por ejemplo, con la necesidad de modificar la representación semiótica de ese mismo "objeto", el estudiante no tiene medios críticos ni culturales ni cognitivos; el maestro y la noosfera no entienden el porqué y acusan al estudiante, culpándolo de algo que él no entiende; lo acusan de una incapacidad vaga, no circunstanciada y detallada: nadie sabe *exactamente* qué es, en verdad, lo que el estudiante no sabe y qué es lo que no sabe hacer.

El concepto (u objeto) en matemática, como superposición o como acumulación de concepciones provisionales

Trataré aquí acerca de una convergencia entre:

a. una posición exquisitamente didáctico-cognitiva, de carácter fuertemente ingenuo, que acepte como hipótesis de base el constructivismo del conocimiento más elemental, posición basada en las concepciones acríticas más difundidas;

b. una posición antropológica en la que todo se refiere a la relación personal con el objeto matemático. Todo esto en el ámbito de una teoría del aprendizaje matemático que no se caracterice de ninguna forma por algún preconcepto teórico u ontológico.

Este título es solo un intento de primera mediación entre las posiciones más ingenuas, pero radicadas en el sentido común y lo hasta aquí expuesto.

En el siguiente, haré algunas consideraciones críticas.

Sean c_i las concepciones provisionales en un proceso lineal y evolutivo (al menos en el tiempo) de asimilación y acomodamiento, relativas a un objeto matemático C. Se necesita distinguir entre:

- c_i científicas de tipo institucional, que diremos académicas (*a*), es decir aquellas que la comunidad científica (académica) acepta como pertinentes, significativas y correctas; se trata de R[*I*(C)] compartidas; las llamaremos c_i de tipo *a*;
- c_i cognitivas de tipo institucional, que diremos escolares (*e*), debidas a la acción de la escuela y a la noosfera, es decir aquellas que una persona construye o ha construido en la escuela; se trata de R[*X*(C)] que pueden ser también no compartidos; las llamaremos c_i de tipo *e*.

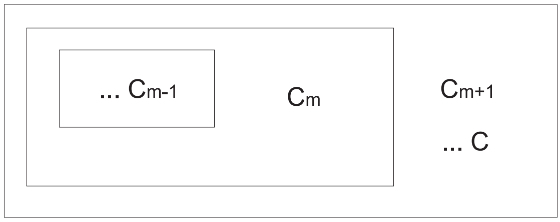
Las c_i de tipo *a* se diferencian de aquellas de tipo *e* solo porque las segundas se hallan más en retardo con respecto a las primeras (es decir: los índices son de valor numérico inferior), o porque son críticamente menos ricas y más basadas en sensaciones, en el buen sentido, ligadas a aplicaciones, menos sujetas a repensamientos y reflexión crítica, más ligadas a varias cláusulas del contrato didáctico.

El sentido del proceso didáctico usual, en su forma más ingenua pero también más difundida, es el de llevar al final a los individuos a la formación de un concepto C que sea la cúspide del proceso evolutivo, el *concepto* supuestamente existente de tipo *a* (o, por lo menos, el más cercano posible a él).

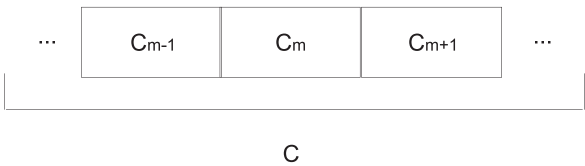
Pero como toda concepción se halla en evolución histórico-crítica perenne, es imposible valorar el logro de este límite, sobre todo porque a lo más se podrá hablar de "*objeto adquirido por la comunidad científica hasta ahora*" y no ponerse en la situación de deber prever el futuro de ese objeto. El "objeto" es por lo tanto, en esta concepción, algo ideal, abstracto, punto culminante de un proceso perennemente en acto del que tenemos solo una idea, limitada a su evolución histórica y su estado actual.

La formación de C a partir de la sucesión c_i puede ser pensada según dos modalidades:

Superposición: toda concepción provisional c_{m+1} agrega e integra la precedente c_m, es decir la comprende y le añade algo, sobreponiéndose a ella:



Acumulación: toda concepción provisional c_{m+1} agrega algo a la c_m precedente, es decir, conserva el contenido de c_m y agrega nuevas informaciones o ideas, sin borrar las viejas:



En realidad, frecuentemente se tienen mezclas de las dos modalidades.

Ejemplo 1: el objeto recta

De manera aproximada, intento dar una sucesión de concepciones provisionales relativas a un supuesto objeto *recta*. En su larga historia evolutiva, se podría pensar a una sucesión de la siguiente manera:

c_1: recta primitiva: segmento (sus características son el ser derecha y delgada, y su independencia nominal de la longitud); esta es la idea ingenua de un niño;

c_2: recta euclidiana: idealización de c_1 [sus características son el tener una sola dimensión (que es la idealización de ser "delgada") y el ser prolongable (que es la idealización de la independencia de la longitud)]; no es muy clara la relación entre puntos y recta; en el sentido pitagórico, el modelo es el de las bolitas (mónadas) de un collar (recta); pero en Euclides no existe ya esta posición ingenua;

c_3: recta densa: idealización de c_2; entre dos puntos *siempre* existe otro. Se supera el modelo pitagórico;

c_4: recta continua (ya a los tiempos de Newton y Leibniz): en la recta existen oportunas posiciones de puntos correspondientes a valores irracionales ($\sqrt{2}$) y trascendentes (π) aunque aún no es muy claro su estatuto epistemológico;

c_5: recta de Hilbert (definida implícitamente por los axiomas): no existe ya el intento de definición explícita para buscar adecuar la imagen de recta a un modelo prefijado al que se quiere llegar, pero se tiene una idealización de la concepción al interior de un sistema teórico;

c_6: recta como nombre común utilizado indiferentemente en un ámbito euclidiano o no: no se habla ya de dimensión, de ser derecha, de ser infinita (pero ilimitada siempre);

c_7: denominación de recta dada a entes diferentes de modelos diferentes (recta finita o infinita, discreta, densa o continua, limitada o ilimitada…);

c_8: objeto n-2 dimensional en una variedad n-dimensional;

…

¿Cómo podríamos decidir cuales c_i ulteriores seguirán? El objeto C "recta" es una superposición o acumulación de las concepciones precedentes; parece que de c_1 a c_4 se puede hablar principalmente de pasos del tipo "superposición", mientras de c_5 a c_8 parecen ser pasos principalmente del tipo "acumulación".

Ejemplo 2: el objeto adición

De manera aproximada, intento dar una sucesión de concepciones provisionales relativas al supuesto objeto *adición*. En su larga historia evolutiva, se podría pensar en una sucesión hecha así:

c_1: adición pitagórica (ordinal y cardinal indistintos) en N-{0}; la adición como cardinal de colecciones disyuntas; es la concepción ingenua de un niño pequeño (sobre este punto Vergnaud explica algunos de sus *teoremas en acto*);

c_2: adición en Q_a; estoy pensando en las adiciones entre fracciones, en la historia sumeria, egipcia y después griega;

c_3: adición en N y en Q_a (0 incluido); en la época medieval, en el mundo indo-arábigo se vuelve necesario ampliar la adición a casos en los cuales uno de los sumandos es el cero;

c_4: adición en Z;

c_5: adición en Q;

c_6: adición en R;

c_7: adición en el campo complejo C;

c_8: adición en los cuaterniones y, más en general, en los sistemas complejos n-valentes; estoy pensando a las investigaciones de Hamilton, Grassman, Frobenius y Hankel; algunas propiedades formales de la adición –típicas de los números N, Z, Q, R y C– se pierden y, sin embargo la operación que extiende y generaliza, la adición se sigue llamando del mismo modo;

c_9: adición generalizada en los retículos y en las álgebras de Boole;

c_{10}: adición generalizada en las estructuras <A,+,x, 0, 1,...>;

…

¿Cómo se podría decidir si y cuales c_i ulteriores seguirán? El pseudo-objeto C "adición" es superposición o acumulación de las concepciones precedentes; parece que de c_1 a c_7 se puede hablar de pasos principalmente de tipo "superposición", mientras que de c_8 a c_{10} parecen ser pasos principalmente del tipo "acumulación".

Críticas a la precedente posición y conclusiones

La visión trazada en el título anterior, repito, es solo un esquema que resume las posiciones más ingenuas –pero también las más difundidas– al respecto. Veamos ahora algunas notas fuertemente críticas.

En todo caso, una reflexión madura muestra que es esencial la actividad de las personas puestas frente a las problemáticas que hacen surgir los c_i; en este sentido, una supuesta escala jerárquica pierde, desde mi punto de vista, sentido; por lo que una mayor "nobleza" conceptual supuesta para las c_i de tipo *a*, con respecto a las de tipo *e*, desaparece.[10] Los "objetos" emergen de la actividad de las personas puestas frente a la solución de problemas, incluso independientemente de todo contexto institucional pri-

10 Este punto, si se acepta, podría tener fuertes repercusiones en la práctica didáctica; y, desde mi punto de vista, debería estudiarse no solo desde la perspectiva teórica, como se ha hecho hasta ahora, en el ámbito de la así llamada Educación Matemática, sino también desde el punto de vista de la acción práctica, en el ámbito de la Didáctica de la Matemática (Godino, Batanero, 1998).

vilegiando, en un cierto sentido, los significados personales con respecto a los institucionales.

Desde esta perspectiva, no parece tener sentido hablar, por ejemplo, del "objeto recta" (o de la "idea de recta", o del "concepto de recta") como normalmente se hace: más bien nos vemos obligados, evidentemente, a hablar de "pluralidad de objetos", no tanto porque se trate de una "escalada" hacia un vértice, sino en cuanto una pluralidad de "objetos" *diferentes* que banalmente tienen en común un nombre propio, pero que no identifica una sola entidad, como en la visión que hemos llamado "teoría realista", sino que su significado depende del contexto de uso, desde la "teoría pragmática". Por lo que toda C_i es, en esta visión, un "objeto recta" (probablemente, con un más cuidadoso análisis, se podría descubrir que, en realidad, el mismo es, a su vez, una pluralidad).

Toda C_i es el resultado de una relación personal con el objeto, pero como hemos visto en Chevallard y en Godino-Batanero, *el objeto es esta misma relación personal*, no un supuesto "objeto en sí".

Por otra parte, el mismo Wittgenstein insiste en el hecho de que no se debe hablar de ideas matemáticas en el sentido en el que se hace habitualmente, es decir, como resultado de un proceso de abstracción, dado que esto origina graves confusiones filosóficas y psicológicas [y didácticas, como me sugiere Juan Díaz-Godino (en una carta privada)]. El Wittgenstein de las *Investigaciones filosóficas* insiste en hablar de diversidad de uso o de usos diferentes del "término" ("recta", "adición", en mis ejemplos precedentes).

En la posición de Godino-Batanero, al "objeto matemático Ox" se propone asociarle la entidad teórica "significado de Ox" (en realidad una clase de significados): se pasa así de la acentuación puesta en el "concepto", sus definiciones y sus reglas de uso, a una nueva acentuación puesta sobre los campos de problemas, de prácticas, de técnicas, de las cuales emergen estas entidades intencionales. Por lo que los dos casos por mí proporcionados, "recta" y "adición", constituyen precisamente un ejemplo de la relatividad de los objetos Ox, que unas veces son entidades mentales (por lo tanto personales), y otras, entidades abstractas (institucionales). No me he detenido demasiado en clarificar y resaltar esta distinción, porque la considero ocasional e intercambiable.

Me parece poder afirmar que en los estudios teóricos de Educación Matemática, en la investigación en este sector y en la práctica didáctica, es de fundamental importancia identificar cuáles son los problemas específicos, las actividades prácticas, las actividades técnicas, etc. que, también históricamente, han llevado al surgimiento de toda "concepción", todo "objeto", toda "regla"; así como tiene suma importancia establecer su real o presunta dependencia de contextos institucionales (podría tenerse una razón histórica, educativa o instrumental, etc., o todas estas juntas).

Referencias bibliográficas

Anderson, R. C.; Spiro, R. J. y Montague, W. E. (1977). *Schooling and the acquisition of knowledge*. Hillsdale, NJ: LEA.

Astolfi, J. P. y Develay, M. (1989). *La transposition didactique en mathématique, en physique et biologie*. Irem de Lyon: Lirdis.

Brousseau, G. (1981). Address of members of the GRDM (France) at the ICME IV. August 1980. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(1), 130-135.

_______________ (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.

Bruner, J. S. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist*, 19, 1-15.

Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble.

________________ (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par un approche anthropologique. *Recherches en Didactique de la Mathématique*, 12(1), 73-112.

Clary, M. y Genin, C. (1991). *Enseigner l'histoire à l'école?* Paris: Hachette/Istra.

Cornu, L. y Vergnioux, A. (1992). *La didactique en questions*. Paris: Hachette.

D'Amore, B. (1999-2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Magisterio. (I ed. italiana: 1999, Bologna: Pitagora).

_________________ (2001). Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèses sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. Gent, Belgie XXXVIII, 2, 143-168.

Dewey, J. (1933). *How we think*. Boston: D. C. Heath.

Dummett, M. (1975). What is a Theory of Meaning? En: *Mind and Language*. Oxford University Press, Oxford.

Duval, R. (1988a). Écarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 7-25.

__________________ (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 57-74.

__________________ (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 235-253.

__________________ (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives,* 5, 37-65.

__________________ (1998). Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre répresentations et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 6, 139-163.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.

Gagné, R. (1965-1985). *The conditions of learning.* New York, Holt, Rinehart & Winston Inc. 1965. [El libro fue completamente cambiado en su formulación, cuando se publicó para la Harcourt-Brace College Publishers, 1985].

Gal'perin, P. J. (1969). Contributo allo studio dello sviluppo intellettuale del bambino, in: *Veggetti M. S*. (ed.) (1977), (pp. 43-63). [El artículo de Gal'perin fue publicado en una revista soviética en 1969].

Giordan, A. y De Vecchi, G. (1987). *Les origines du savoir*. Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14, 3, 325-355. [Trad. italiana Bologna, Pitagora 1999, como libro en la colección: Bologna-Querétaro].

__________________ (1998). The dialectic relationships among theory, development and practice in Mathematics Education: a meta-analysis of three investigations. In N. A. Malara (ed.). *An international view on didactics of mathematics as a scientific discipline. Proceedings of WG 25 ICME 8, Sevilla, July 1996.* Modena: CNR-MURST-University of Modena, 13-22. [Tr. it. *La Matematica e la sua Didattica*, 4, 1998].

Klausmeier, H. J. (1979). *Un modello per l'apprendimento dei concetti*. En: C. Pontecorvo y P. Guidoni (ed.). Scienza e scuola di base. Roma: Istituto Enciclopedia Italiana.

Klausmeier, H. J. (1980). *Learning and teaching concepts*. New York: Academic Press.

Klausmeier, H. J.; Gathala, E. S. y Frayer, D. A. (1974). *Conceptual learning and development*. New York and London: Academic Press.

Kutschera, F. von (1979). *Filosofía del lenguaje*. Madrid: Gredos.

Luria, A. R. (1982). *Language and Cognition*, (ed. J. V. Wertsch). Washington: V. H. Winston.

Meirieu, P. (1987). *Apprendre... oui, mais comment?* Paris: ESF.

Nelson, K. (1974). Concept, word and sentence: interrelations in acquisition and development. *Psychological Review*, 81(4), 267-285.

__________________ (1977). Cognitive development and the acquisition of concepts. In: R. S. Anderson; R. J. Spiro y W. E. Montague (eds.). *Schooling and the acquisition of knowledge*. Hillsdale. N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Piaget, J.; Inhelder, B. y Szeminska, A. (1948). *La géométrie spontanée de l'enfant,* Paris: PUF.

Pontecorvo, C. (Ed.) (1983). *Conoscenza scientifica e insegnamento*. Torino: Loescher.

Pontecorvo, C. y Guidoni, P. (1979). *Scienza e scuola di base*. Roma: Istituto della Enciclopedia Treccani.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 10(3), 24-36.

Speranza, F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora.

Tornatore, L. (1974). *Educazione e conoscenza*. Torino: Loescher.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 133-169.

Vigotsky, L. S. (1981). The development of higher forms of attention in childhood. In J. V. Werscht (ed.). *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 189-240). Armonk, NY: Sharpe. [La I edición rusa es de 1960, Moscú: Izd. Akad. Pedag.]

__________________ (1962). *Thought and language*. Cambridge, MIT Press. [Se trata de un resumen tomado de la edición original en lengua rusa, colección de artículos publicados en Moscú en 1956. Ed. francesa: 1985, París: Éd. Sociale.]

Otras lecturas sugeridas

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivisticas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*. Barcelona, España. 35, 90-106.

__________________ (2005). La argumentación matemática de jóvenes alumnos y la lógica hindú (*nyaya*). *Uno*. [Barcellona, Spagna]. 38, 83-99. [Questo testo si trova anche negli Atti del *VII Simposio de Educación Matemática: Investigación en Didáctica de la Matemática*. 3-6 maggio 2005, Chivilcoy, Buenos Aires, Argentina. www.edumat.com.ar].

__________________ (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica*. 3, 325-336.

__________________ (2005). Pipas, caballos, triánguloy significados. Contribución a una teoría problemática del significado conceptual, de Frege y Manritte, hasta nuestros días. *Números*. [Tenerife, Spagna]. 61, 3-18.

__________________ (2005). Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática. México DF, México: Reverté-Relime. Prefacio de Guy Brousseau. Prefacio a la edición en idioma español de Ricardo Cantoral. Traducción de Martha Isabel Fandiño Pinilla.

__________________ (2004). El papel de la epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria. Épsilon [Cádiz, España]. 60, 20, 3, 413-434.

__________________ (2006). Elementos de Didáctica de las Matemáticas. En: *Cartillas Pedagógicas*. Bogotá: Alcaldía Mayor de Bogotá, Secretaría de Educación – Universidad Distrital. Red Distrital de Educación Matemática.

__________________ (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. En: Radford L. y D'Amore B. (eds.) (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Número especial *Revista Relime* (Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa) (Cinvestav, México DF., México). 177-196. http://laurentian.ca/educ/lradford/Relime_semiotic_06.pdf

___________________ (2006). Conclusiones y perspectivas de investigación futura. En: Radford, L. y D'Amore, B. (eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Número especial *Revista Relime* (Cinvestav, México DF., México), 301-306. http://laurentian.ca/educ/lradford/Relime_semiotic_06.pdf

D'Amore, B. y Godino, J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 9-38.

____________________ (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Relime*. [Aceptado, en prensa].

D'Amore, B.; Radford, L. y Bagni, G. T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 29B, 1, 11-40.

D'Amore, B. y Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Revista Relime*. Vol. 10, N. 1. 39-68

Radford, L. y D'Amore, B. (Eds.) (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Número especial (en inglés, francés y español) *Revista Relime* (Cinvestav, México DF., México). http://laurentian.ca/educ/lradford/Relime_semiotic_06.pdf

Font, V.; Godino, J. y D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *For the learning of mathematics*. Aceptado, en impresión. Vol. 27, n° 2, paginas 2-7 y 14.

Sito: www.dm.unibo.it/rsddm

Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática[1]

Juan D. Godino[2] (*)
Cármen Batanero (*)
Vicenç Font (**)

**Universidad de Granada*
***Universidad de Barcelona*

En este trabajo presentamos una síntesis del modelo teórico sobre el conocimiento y la instrucción matemática, en cuya elaboración venimos trabajando desde hace varios años. Como rasgos característicos destacamos la articulación de las facetas institucionales y personales del conocimiento matemático, la atribución de un papel clave a la actividad de resolución de problemas, a los recursos expresivos y la asunción coherente de supuestos pragmáticos y realistas sobre el significado de los objetos matemáticos. El modelo de cognición matemática elaborado se adopta como elemento clave sobre el que basar el desarrollo de una teoría de la instrucción matemática significativa, permitiendo así mismo comparar y articular diversas aproximaciones teóricas usadas en Didáctica de las Matemáticas desde un punto de vista unificado.

Introducción

El fin específico de la Didáctica de las Matemáticas, como campo de investigación, es el estudio de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo de programas de mejora de dichos procesos. Como propuso el programa de Steiner para la Teoría de la Educación Matemática, es necesario *"el desarrollo de una aproximación comprensiva a la educación matemática, que debe ser vista*

1 Versión ampliada del artículo The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, Vol. 39 (1-2): 127-135 (2007).
En este trabajo realizamos una síntesis actualizada de diversas publicaciones de Godino y colaboradores donde se desarrolla un marco teórico para la Didáctica de las Matemáticas desde un enfoque ontológico y semiótico. Estos trabajos están disponibles en Internet, URL: http://www.ugr.es/local/jgodino

2 El profesor D. Godino es docente visitante en el Doctorado Interinstitucional en Educación, Énfasis en Matemáticas, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia.

en su totalidad como un sistema interactivo que comprende investigación, desarrollo y práctica" (Steiner *et al*., 1984, p. 16).

Para lograr este objetivo, la Didáctica de las Matemáticas debe considerar las contribuciones de diversas disciplinas como la psicología, pedagogía, filosofía, o la sociología. Además debe tener en cuenta y basarse en un análisis de la naturaleza de los contenidos matemáticos, su desarrollo cultural y personal, particularmente en el seno de las instituciones escolares. Este análisis ontológico y epistemológico es esencial para la Didáctica de las Matemáticas ya que difícilmente podría estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos difusos o indefinidos.

Así pues, la investigación en Didáctica de las Matemáticas no puede ignorar cuestiones filosóficas tales como:

- ¿Cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos?
- ¿Qué papel juegan la actividad humana y los procesos socioculturales en el desarrollo de las ideas matemáticas?
- ¿Las matemáticas se descubren o se inventan?
- ¿Agotan las definiciones formales y los enunciados de las proposiciones el significado integral de los conceptos?
- ¿Cuál es el papel que juegan en el significado de los objetos matemáticos, sus relaciones con otros objetos, las situaciones problemáticas en las cuales se usan como herramientas, y las diversas representaciones simbólicas?

La emergencia relativamente reciente del área de conocimiento de Didáctica de las Matemáticas explica que no exista aún un paradigma de investigación consolidado y dominante. Diversos trabajos (Ernest, 1994; Sierpinska y Lerman, 1996; Gascón, 1998; Font, 2002), cuyo objetivo ha sido realizar propuestas de organización de los diferentes programas de investigación en educación matemática, han puesto de manifiesto la diversidad de aproximaciones teóricas que se están desarrollando en la actualidad. En ciertos momentos esta diversidad puede ser inevitable, incluso enriquecedora, pero el progreso de la disciplina y la potenciación de sus aplicaciones prácticas exigen aunar esfuerzos para identificar el núcleo firme de conceptos y métodos que, a la larga, deberían cristalizar –utilizando la clásica terminología de Lakatos (1983)– en un verdadero programa de investigación.

Uno de los principales problemas "meta-didácticos" que debemos abordar es la clarificación de las nociones teóricas que se vienen utilizando en el área de conocimiento, en particular las nociones usadas para analizar los fenómenos cognitivos. No hay un consenso sobre este tema. Basta observar la variedad de nociones que se usan sin que se haya iniciado su contrastación, clarificación y depuración: conocimientos, saberes, competencias, concepciones, conceptos, representaciones internas, imágenes conceptuales, esquemas, invariantes operatorios, significados, praxeologías, etc.

El progreso en el campo exige contrastar estas herramientas y posiblemente elaborar otras nuevas que permitan realizar de manera más eficaz el trabajo requerido. Además, es necesario tratar de articular de manera coherente las diversas facetas implicadas, entre las que debemos citar la ontológica (tipos de objetos y su naturaleza), epistemológica (acceso al conocimiento), sociocultural e instruccional (enseñanza y aprendizaje organizado en el seno de instituciones escolares).

Pensamos que es necesario y posible construir un enfoque unificado de la cognición e instrucción matemática que permita superar los dilemas que se plantean entre los diversos paradigmas en competición: realismo-pragmatismo, cognición individual-institucional, constructivismo-conductismo, etc. Para ello se deben tener en cuenta algunas herramientas conceptuales y metodológicas de disciplinas de tipo holístico como la semiótica, la antropología y la ecología, articuladas de manera coherente con disciplinas como la psicología y la pedagogía, que tradicionalmente han sido el punto de referencia inmediato para la Didáctica de las Matemáticas.

Hacia un enfoque unificado del conocimiento y la instrucción matemática

Desde hace más de 10 años estamos interesados en la problemática descrita de fundamentación de la investigación en Didáctica de las Matemáticas y nos encontramos desarrollando diversas herramientas teóricas que permitan abordar algunas de las cuestiones mencionadas. En Godino (2003, cap. 2)[3] describimos con detalle los antecedentes teóricos en los que apoyamos el sistema de nociones sobre el conocimiento matemático que proponemos para el estudio de los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Estas herramientas se han desarrollado en tres etapas, en cada una de las cuales hemos ido refinando progresivamente el objeto de nuestra indagación. A continuación describimos sucintamente las tres etapas y los problemas abordados en cada una de ellas.

En nuestros primeros trabajos, publicados en el periodo 1993-1998 (Godino y Batanero, 1994; Godino, 1996; Godino y Batanero, 1998), desarrollamos y precisamos progresivamente las nociones de "*significado institu-*

3 Los trabajos citados de Godino *et al.* están disponibles en Internet, en la dirección http://www.ugr.es/local/jgodino

cional y personal de un objeto matemático" (entendidos ambos en términos de sistemas de prácticas en las que el objeto es determinante para su realización) y su relación con la noción de comprensión. Desde supuestos pragmáticos, estas ideas tratan de centrar el interés de la investigación en los conocimientos matemáticos institucionalizados, pero sin perder de vista el sujeto individual hacia el que se dirige el esfuerzo educativo.

En una segunda etapa (a partir de 1998) hemos considerado necesario diseñar modelos ontológicos y semióticos más detallados que el elaborado hasta dicha fecha. Esta reflexión surge del hecho de que el problema epistémico-cognitivo no puede desligarse del ontológico. Por este motivo nos sentimos interesados en continuar con la elaboración de una ontología suficientemente rica para describir la actividad matemática y los procesos de comunicación de sus "producciones".

En la primera fase proponíamos como noción básica para el análisis epistémico y cognitivo (dimensiones institucional y personal del conocimiento matemático) "*los sistemas de prácticas manifestadas por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones-problemas*". Sin embargo, en los procesos comunicativos que tienen lugar en la educación matemática, no solo hay que interpretar las entidades conceptuales, sino también las situaciones problemáticas y los propios medios expresivos y argumentativos que desencadenan procesos interpretativos. Ello supone conocer los diversos objetos emergentes de los tipos de prácticas, así como su estructura.

Llegamos a la conclusión de que es preciso estudiar con más amplitud y profundidad las relaciones dialécticas entre el pensamiento (las ideas matemáticas), el lenguaje matemático (sistemas de signos) y las situaciones-problemas para cuya resolución se inventan tales recursos. En consecuencia, en este periodo hemos tratado de progresar en el desarrollo de una ontología y una semiótica específica que estudie los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos puestos en juego en la interacción didáctica.

Estas cuestiones son centrales en otras disciplinas (como la semiótica, la epistemología y la psicología), aunque constatamos que no se puede hablar de una solución clara para las mismas. Las respuestas dadas son diversas, incompatibles o difíciles de compaginar, como se puede ver, por ejemplo, en los dilemas planteados por las aproximaciones propuestas por Peirce (1965), Saussure (1915) y Wittgenstein (1953). El interés por el uso de nociones semióticas en educación matemática es creciente, según se muestra en la monografía editada por Anderson *et al*. (2003) y el número monográfico de la revista *Educational Studies in Mathematics* (Sáenz-Ludlow y Presmeg, 2006).

Hemos tratado de dar una respuesta particular desde el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas, ampliando las investigaciones realizadas hasta la fecha sobre los significados institucionales y personales, y completando también la idea de función semiótica y la ontología matemática asociada que introdujimos en Godino y Recio (1998).

En una tercera etapa de nuestro trabajo, nos hemos interesado por los modelos teóricos propuestos en el seno de la Didáctica de las Matemáticas sobre la instrucción matemática[4] (Godino, Contreras y Font, 2006). Proponemos distinguir en un proceso de instrucción matemática seis dimensiones, cada una modelizable como un proceso estocástico con sus respectivos espacios de estados y trayectorias: epistémica (relativa al conocimiento institucional), docente (funciones del profesor), discente (funciones del estudiante), mediacional (relativa al uso de recursos instruccionales), cognitiva (génesis de significados personales) y emocional (que da cuenta de las actitudes, emociones, etc., de los estudiantes ante el estudio de las matemáticas)[5]. El modelo ontológico y semiótico de la cognición proporciona criterios para identificar los estados posibles de las trayectorias epistémica y cognitiva, y la adopción de la "negociación de significados" como noción clave para la gestión de las trayectorias didácticas. El aprendizaje matemático se concibe como el resultado de los patrones de interacción entre los distintos componentes de dichas trayectorias.

Los constructos teóricos elaborados durante estos tres periodos constituyen el modelo ontológico-semiótico que sintetizamos en los apartados siguientes. Dicho modelo trata de aportar herramientas teóricas para analizar conjuntamente el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y los factores que condicionan su desarrollo. Asimismo, se tienen en cuenta facetas del conocimiento matemático que pueden ayudar a confrontar y articular distintos enfoques de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje, y progresar hacia un modelo unificado de la cognición e instrucción matemática.

4 Entendida como enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos en el seno de los sistemas didácticos.

5 En el subtítulo *Recapitulación* añadimos, además, la dimensión ecológica para tener en cuenta las interacciones entre los procesos de estudio y el contexto social y educativo en que tienen lugar.

En este apartado presentamos una síntesis de los supuestos y nociones teóricas que constituyen el Enfoque Ontosemiótico[6] (EOS) sobre el conocimiento y la instrucción matemática. En la sección 4 describimos las concordancias y complementariedades de este marco con otros modelos teóricos usados en Didáctica de las Matemáticas. En el título *Ejemplos de investigaciones* resumimos dos investigaciones que utilizan algunas de las herramientas del EOS.

El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. Tomando como noción primitiva la de situación-problemática, se definen los conceptos teóricos de práctica, objeto (personal e institucional) y significado, con el fin de hacer patente y operativo, por un lado, el triple carácter de la matemática a que hemos aludido, y por otro, la génesis personal e institucional del conocimiento matemático, así como su mutua interdependencia.

Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a campos o tipos de problemas

Consideramos *práctica matemática* a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento[7].

En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante

6 En algunas publicaciones el EOS se designa como Teoría de las Funciones Semióticas (TFS), al considerar que la "función semiótica" es un constructo clave de dicho enfoque.

7 Las instituciones se conciben como "comunidades de prácticas" e incluyen, por tanto, las culturas, grupos étnicos y contextos socioculturales. En consecuencia se asume el postulado antropológico de la relatividad socioepistémica de los sistemas de prácticas, de los objetos emergentes y los significados.

tipos de situaciones problemáticas. A la pregunta ¿Qué es el objeto matemático[8] *media aritmética*?, ¿qué significa o representa la expresión *media aritmética*?, se propone como respuesta que es "*el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal) o las compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas, en los cuales se requiere encontrar un representante de un conjunto de datos*". Con esta formulación del significado, el EOS asume los presupuestos de la epistemología pragmatista: "*las categorías opuestas de sujeto y objeto pasan a un segundo plano al asignárseles un estatuto derivado, y ceden su lugar privilegiado a la categoría de acción*" (Faerna, 1996; p. 14).

La relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados –entendidos como sistemas de prácticas– y su utilización en el análisis didáctico, lleva a introducir la tipología básica de significados que se resume en la figura 1 (Godino, 2003, p. 141). Con relación a los significados institucionales, proponemos tener en cuenta los siguientes tipos:

- *Implementado*: en un proceso de estudio específico, es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- *Evaluado*: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.
- *Pretendido*: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- *Referencial*: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico[9] del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.

Respecto de los significados personales, proponemos los siguientes tipos:

- *Global*: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar el potencial sujeto, relativas a un objeto matemático.
- *Declarado*: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a pro-

8 Inicialmente usamos la expresión "objeto matemático" como sinónimo de "concepto matemático". Más adelante extendemos su uso para indicar cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo, que interviene de algún modo en la actividad matemática. Este uso general o débil de objeto es el que se hace también en el interaccionismo simbólico (Blumer, 1969).

9 Wilhelmi, Lacasta y Godino (en prensa).

pósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.

- *Logrado*: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio, interesará tener en cuenta los *significados iniciales* o previos de los estudiantes y los que *finalmente alcancen*.

Figura 1. Tipos de significados institucionales y personales

En la parte central de la figura 1 indicamos las relaciones dialécticas entre enseñanza y aprendizaje, que supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales. Asimismo, la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados.

Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc., que evocamos al hacer matemáticas) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura[10]. Si los sistemas de prácticas

10 “*El discurso matemático y sus objetos son mutuamente constitutivos*” (Sfard, 2000, p. 47).

son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales"[11], mientras que si tales sistemas corresponden a una persona los consideramos como "objetos personales"[12]. La noción de emergencia se puede relacionar, desde el punto de vista de los objetos personales, con los procesos cognitivos que Sfard (1991) describe como interiorización, condensación y reificación, mientras que desde el plano institucional se relaciona con los procesos de comunicación, simbolización y regulación. La emergencia de los objetos también está relacionada con la metáfora ontológica (Lakoff y Núñez, 2000), que lleva a considerar acontecimientos, actividades, ideas y demás, como si fueran entidades (objetos, cosas, etc.).

Se propone la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- *Lenguaje* (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).
- *Situaciones-problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios).
- *Conceptos- definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones: recta, punto, número, media, función).
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos).
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo).

A su vez estos objetos se organizan en entidades más complejas: sistemas conceptuales, teorías, etc.

Los seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática. También se amplía el "triángulo epistemológico" (Steinbring, 2006) (signo/símbolo, objeto/contexto de referencia, concepto), especialmente al problematizar la noción de concepto e interpretar el "objeto/contexto de referencia" en términos de situaciones-problemas. Las situaciones-problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí.

11 Esta formulación de los objetos institucionales concuerda con el modo de concebir los "objetos conceptuales culturales" en la semiótica cultural (Radford, 2006): "*Los objetos matemáticos son formas conceptuales de actividad reflexiva mediada histórica, social y culturalmente encarnada*" (p. 57).

12 Los "objetos personales" incluyen a los constructos cognitivos, tales como concepciones, esquemas, representaciones internas, etc.

La consideración de una entidad como primaria no es una cuestión absoluta sino relativa, puesto que se trata de entidades funcionales y referentes a los juegos de lenguaje (marcos institucionales y contextos de uso) en que participan; tienen también un carácter recursivo –en el sentido de cada objeto–; dependiendo del nivel de análisis, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos (un argumento, por ejemplo, puede poner en juego conceptos, proposiciones, procedimientos, etc.).

Relaciones entre objetos: función semiótica

Se adopta de Hjelmslev (1943) la noción de función de signo[13] como la dependencia entre un texto y sus componentes, y de estos componentes entre sí. Se trata, por tanto, de las correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, representante) y un consecuente (contenido, representado) establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. Estos códigos pueden ser reglas (hábitos, convenios) que informan a los sujetos implicados sobre los términos que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas.

Las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo representacional (un objeto se pone en lugar de otro para un cierto propósito), instrumental[14] (un objeto usa a otro u otros como instrumento) y estructural (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos). De esta manera, las funciones semióticas y la ontología matemática asociada, tienen en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de las matemáticas y generalizan de manera radical la noción de representación. El papel de representación no queda asumido en exclusividad por el lenguaje: en consonancia con la semiótica de Peirce, se postula que los distintos tipos de objetos (situaciones-problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), pueden ser también expresión o contenido de las funciones semióticas.

El uso de las funciones semióticas permite un refinamiento de los análisis del significado en términos de prácticas. Las funciones semióticas son un instrumento relacional que facilita el estudio conjunto de la manipulación de ostensivos matemáticos y del pensamiento que las acompaña, característico de las prácticas matemáticas.

13 Descrita por U. Eco como *función semiótica:*
Un signo está constituido siempre por uno (o más) elementos de un plano de la expresión colocados convencionalmente en correlación con uno (o más) elementos de un plano del contenido (…) Una función semiótica se realiza cuando dos funtivos (expresión y contenido) entran en correlación mutua. (Eco, 1995, pp. 83-84).

14 Con las palabras no solo se dicen cosas, sino que también se hacen (Austin, 1982).

Configuraciones de objetos y procesos matemáticos

La noción de "sistema de prácticas" es útil para ciertos análisis de tipo macrodidáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para un análisis más fino de la actividad matemática es necesario introducir los seis tipos de entidades primarias comentadas anteriormente: situaciones, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando *configuraciones*, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Estas configuraciones pueden ser *epistémicas* (redes de objetos institucionales) o *cognitivas* (redes de objetos personales). Los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos en su doble versión, personal e institucional.

La constitución de estos objetos y relaciones (configuraciones), tanto en su faceta personal como institucional, tiene lugar a lo largo del tiempo mediante procesos matemáticos, los cuales son interpretados como "secuencias de prácticas". Los objetos matemáticos emergentes constituyen la cristalización o reificación resultante de tales procesos (dialéctica instrumento-objeto de Douady, 1986; dualidad objeto-proceso de Sfard, 1991).

Nuestra manera de interpretar los procesos matemáticos como secuencias de prácticas en correspondencia con los tipos de objetos matemáticos primarios, nos proporciona criterios para categorizarlos. La constitución de los objetos lingüísticos, problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos primarios de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, etc.) y argumentación.

La *resolución de problemas* –y de manera más general, la *modelización*– debe ser considerada más bien como "hiper-procesos" matemáticos, al implicar configuraciones complejas de los procesos matemáticos primarios (establecimiento de *conexiones* entre los objetos y *generalización* de técnicas, reglas y justificaciones). La realización efectiva de los procesos de estudio requiere, además, la realización de secuencias de prácticas de planificación, control y evaluación (*supervisión*) que conllevan procesos meta-cognitivos.

Atributos contextuales

La noción de juego de lenguaje (Wittgenstein, 1953) ocupa un lugar importante, al considerarla, junto con la noción de institución, como los elementos contextuales que relativizan los significados de los objetos matemáticos y atribuyen a estos una naturaleza funcional. Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas –según el juego de lenguaje en que participan– pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, 2002):

- *Personal-institucional*. Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales", mientras que si estos sistemas son específicos de una persona, se consideran como "objetos personales" (Godino y Batanero, 1994, p. 338). La cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática. La "cognición personal" es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras la "cognición institucional" es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos que forman una comunidad de prácticas.
- *Ostensivo-no ostensivo*. Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no-ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos). Esta clasificación entre ostensivo y no ostensivo es relativa al juego de lenguaje en que participan. El motivo es que un objeto ostensivo puede ser también pensado, imaginado por un sujeto o estar implícito en el discurso matemático (por ejemplo, el signo de multiplicar en la notación algebraica).
- *Expresión-contenido*: antecedente y consecuente de cualquier función semiótica.

La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestos en relación unos con otros. El vínculo se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como concordancias entre un *antecedente* (expresión, significante) y un *consecuente* (contenido, significado), establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

- *Extensivo-intensivo (ejemplar-tipo)*. Un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo específico, la función $y = 2x + 1$) y una clase más general (la familia de funciones $y = mx + n$, por ejemplo). La dualidad extensivo-intensivo se utiliza para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos (Contreras *et al.*, 2005). Esta dualidad permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, que sin duda es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático. "*La generalización es esencial porque este es el proceso que distingue la creatividad matemática de la conducta mecanizable o algorítmica*" (Otte, 2003, p. 187).

- *Unitario-sistémico*. En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se supone, son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su análisis. En el estudio de la adición y sustracción, en los últimos niveles de educación primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas, etc.) se considera como algo conocido y en consecuencia como entidades unitarias (elementales). Estos mismos objetos, en el primer curso tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje.

Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos primarios y secundarios, dando lugar a distintas "versiones" de dichos objetos a través de los siguientes *procesos cognitivos/epistémicos*:

- institucionalización-personalización;
- generalización-particularización;
- análisis/descomposición-síntesis/reificación;
- materialización/concreción-idealización/abstracción;
- expresión/representación-significación.

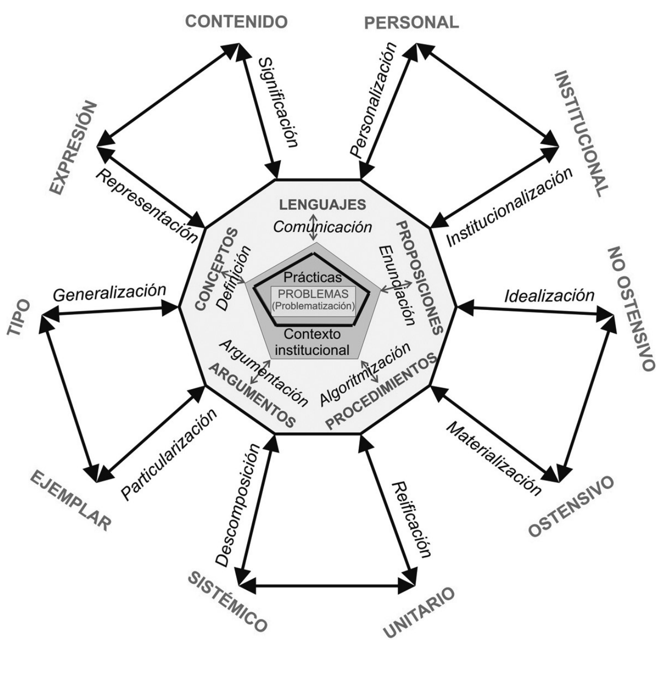


Figura 2. Modelo ontosemiótico de los conocimientos matemáticos

En la figura 2 se representan las diferentes nociones teóricas que se han descrito sucintamente. En el EOS la actividad matemática ocupa el lugar central y se modeliza en términos de sistema de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen los distintos tipos de objetos matemáticos, que están relacionados entre sí formando configuraciones. Por último, los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las cinco facetas o dimensiones duales.

Las nociones teóricas descritas –sistemas de prácticas, instituciones, procesos, entidades emergentes, configuraciones, atributos contextuales, junto con la noción de función semiótica como entidad relacional básica– constituyen una respuesta operativa al problema ontológico de la representación y significación del conocimiento matemático.

Comprensión y conocimiento en el EOS

Básicamente hay dos maneras de entender la "comprensión": como proceso mental o como competencia (Godino, 2000; Font, 2001). Estos dos puntos de vista responden a concepciones epistemológicas que, como mínimo, son divergentes, por no decir que están claramente enfrentadas. Los enfoques cognitivos en la Didáctica de las Matemáticas, en el fondo, entienden la comprensión como "proceso mental". Los posicionamientos pragmatistas del EOS, en cambio, llevan a entender la comprensión, de entrada, como competencia y no tanto como proceso mental (se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas).

Ahora bien, el hecho de considerar que las funciones semióticas tienen un papel esencial en el proceso relacional que se realiza en las prácticas matemáticas entre entidades o grupos de ellas, (dentro de un determinado juego de lenguaje), permite también entender en el EOS la comprensión en términos de funciones semióticas (Godino, 2003). En efecto, podemos interpretar la comprensión de un objeto O por parte de un sujeto X (sea individuo o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego O como funtivo (expresión o contenido). Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Hablar de conocimiento equivale a hablar del contenido de una función semiótica (o muchas), resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo.

Recapitulación

En nuestras reflexiones teóricas iniciales sobre la naturaleza de las matemáticas nos preguntábamos qué es un objeto matemático[15] –por ejemplo, la media aritmética– y qué significa la expresión "media aritmética". (Godino y Batanero, 1994). El uso que hacíamos en esta etapa de *objeto matemático* viene a ser equivalente a *concepto matemático* (idea o noción matemática)[16]. Adoptando una epistemología pragmatista-antropológica, establecimos como respuesta una función semiótica cuyo antecedente (significante) es el objeto matemático –o la expresión que lo designa– y el consecuente (significado), un nuevo constructo que describimos como el "*sistema de prácticas matemáticas realizadas por una persona (o compartida en el seno de una institución) ante una cierta clase de situaciones-problemas*". De esta manera se trata de superar la visión parcial y sesgada de los objetos matemáticos aportada por la perspectiva conceptualista/formalista en la que los objetos matemáticos se reducen a sus definiciones y relaciones lógicas con otros objetos.

Con la finalidad de hacer operativas estas nociones para describir la actividad matemática, los "productos" resultantes de dicha actividad y los procesos de comunicación matemática, hemos procedido a una progresiva ampliación de la noción de objeto matemático y significado. *Objetos matemáticos* no son solo los conceptos, sino cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo, que interviene de algún modo en la actividad matemática. Asimismo, *significados* no son solo "*los sistemas de prácticas*", sino "*el contenido de cualquier función semiótica*". Con este uso ampliado de *objeto y significado* se requiere, en cada circunstancia, especificar el tipo de objeto o de significado referido para que la comunicación pueda ser efectiva. Hablamos así de *objetos emergentes* de los sistemas de prácticas como resultantes de los procesos de definición (definiciones), argumentación (argumentos), etc.; *objetos relacionales* (funciones semióticas); *objetos personales o institucionales; objetos extensivos o intensivos*; etc.

Como respuesta final –abierta a revisión y refinamiento– a la cuestión epistemológica sobre la naturaleza y origen de los conceptos matemáticos, proponemos el par (*sistema de prácticas, configuración*), entendiendo,

15 Cuestiones similares se plantea Sfard (2000, pp. 42-43): "*Los símbolos matemáticos refieren a algo, pero, ¿a qué? ... ¿Cuál es el estatus ontológico de estas entidades? ¿De dónde vienen? ¿Cómo podemos alcanzarlos (o construirlos)?*"

16 En D'Amore (2001) se presenta un estudio extenso del debate sobre los conceptos y los objetos matemáticos. Asimismo, Otte (2003) analiza en qué sentido las matemáticas tienen objetos, enfatizando el papel esencial de la dualidad particular-general (que en nuestro caso designamos como extensivo-intensivo, o ejemplar-tipo).

además, que tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones son relativas y dependientes de los atributos contextuales duales descritos en el subtítulo *Atributos contextuales* del presente título.

Sin duda se trata de un modelo teórico complejo, pero se está revelando una herramienta potente y útil para describir y explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Problemas, prácticas, procesos y objetos didácticos

El modelo teórico sobre la cognición que hemos descrito puede ser aplicado de manera más general a otros campos del saber, en particular a los saberes didácticos. En este caso los problemas tendrán una naturaleza distinta:

- ¿Qué contenido enseñar en cada contexto y circunstancia?
- ¿Cómo distribuir en el tiempo los distintos componentes y facetas del contenido a enseñar?
- ¿Qué modelo de proceso de estudio implementar en cada circunstancia?
- ¿Cómo planificar, controlar y evaluar el proceso de estudio y aprendizaje?
- ¿Qué factores condicionan el estudio y el aprendizaje?, etc.

En este caso las acciones (prácticas didácticas) que se pongan en juego, su secuenciación (procesos didácticos) y los objetos emergentes de tales sistemas de prácticas (objetos didácticos) serán diferentes respecto del caso de la solución de problemas matemáticos.

En la Teoría de las Configuraciones Didácticas (Godino, Contreras y Font, 2006), sobre la que venimos trabajando, modelizamos la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático como un proceso estocástico multidimensional compuesto de seis subprocesos (epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional) con sus respectivas trayectorias y estados potenciales. Como unidad primaria de análisis didáctico se propone la *configuración didáctica,* constituida por las interacciones profesor-alumno a propósito de un objeto o contenido matemático y usando unos recursos materiales específicos. Se concibe como una realidad organizacional, como un sistema abierto a la interacción con otras configuraciones de las trayectorias didácticas de las que forman parte. El proceso de instrucción sobre un contenido o tema matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas.

Una configuración didáctica lleva asociada una *configuración epistémica*, esto es una tarea, los procedimientos requeridos para su solución, lenguajes, conceptos, proposiciones y argumentaciones, las cuales pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o distribuidas entre ambos. Asociada a una configuración epistémica habrá una *configuración instruccional*, constituida por la red de objetos docentes, discentes y mediacionales puestos en juego a propósito del problema o tarea matemática abordada. La descripción de los aprendizajes que se van construyendo a lo largo del proceso se realiza mediante las *configuraciones cognitivas*, red de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas personales que se ponen en juego en la implementación de una configuración epistémica. Estas nociones teóricas se complementan con la formulación de criterios de idoneidad de los procesos de instrucción matemática (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005), que pueden ayudar en el diseño, implementación y evaluación de tales procesos.

Criterios de idoneidad didáctica

Las nociones teóricas precedentes se complementan con la noción de *idoneidad didáctica* de un proceso de instrucción, que se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes (Godino, Contreras y Font, 2006):

- *Idoneidad epistémica*, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. Por ejemplo, la enseñanza de la adición en la educación primaria puede limitarse al aprendizaje de rutinas y ejercicios de aplicación de algoritmos (baja idoneidad) o tener en cuenta los diferentes tipos de situaciones aditivas e incluir la justificación de los algoritmos (alta idoneidad).
- *Idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial (Vygotski, 1934) de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados. Un proceso de enseñanza-aprendizaje con un alto grado de idoneidad cognitiva sería, en el estudio las operaciones aritméticas con números de tres o más cifras, que el profesor realizara una evaluación inicial para saber si la mayoría de los alumnos dominan los números de uno y dos cifras y, en caso de no ser así, comenzara el proceso de instrucción trabajando dichos números.
- *Idoneidad interaccional*. Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos[17] potenciales (que se puedan detectar *a priori)*, y

17 Un *conflicto semiótico* es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto, los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales.

por otra parte permita resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción. Por ejemplo, un proceso de estudio realizado de acuerdo con una secuencia de situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización (Brousseau, 1997) tiene potencialmente mayor idoneidad semiótica que un proceso magistral que no tenga en cuenta las dificultades de los estudiantes.

- *Idoneidad mediacional,* grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, si el profesor y los alumnos tuvieran a su disposición medios informáticos pertinentes al estudio del tema en cuestión (por ejemplo Cabri para la geometría plana), el proceso de estudio que se apoye en estos recursos tendría potencialmente mayor idoneidad mediacional que otro tradicional basado exclusivamente en la pizarra, lápiz y papel. Asimismo, un ejemplo de un proceso de enseñanza-aprendizaje con un alto grado de idoneidad mediacional con relación a los medios temporales sería una clase magistral, donde el profesor reproduce de manera íntegra y sin interacción con los estudiantes el significado pretendido.
- *Idoneidad emocional*, grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad emocional está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa. Por ejemplo, tendrán idoneidad emocional alta los procesos basados en el uso de situaciones-problemas que sean de interés para los estudiantes.
- *Idoneidad ecológica*, grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo de la escuela y la sociedad, y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

Como se puede deducir de los ejemplos propuestos, la idoneidad de una dimensión no garantiza la idoneidad global del proceso de enseñanza-aprendizaje. Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de adecuación y pertinencia respecto del proyecto educativo global (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005). Esta idoneidad se debe interpretar, no obstante, como relativa a unas circunstancias temporales y contextuales cambiantes, lo que requiere una actitud de reflexión e investigación por parte del profesor y demás agentes que comparten la responsabilidad del proyecto educativo.

Todas estas nociones las consideramos útiles para el análisis de proyectos y experiencias de enseñanza. Los distintos elementos pueden interactuar entre sí, lo que sugiere la extraordinaria complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje. El logro de una idoneidad alta en una de las dimensiones, por ejemplo la epistémica, puede requerir de capacidades cognitivas que no posean los estudiantes a los que se dirige la enseñanza. Una vez logrado un cierto equilibrio entre las dimensiones epistémica y cognitiva, es necesario que la trayectoria didáctica optimice la identificación y solución de conflictos semióticos. Los recursos técnicos y el tiempo disponible también interaccionan con las situaciones-problemas, el lenguaje, etc.

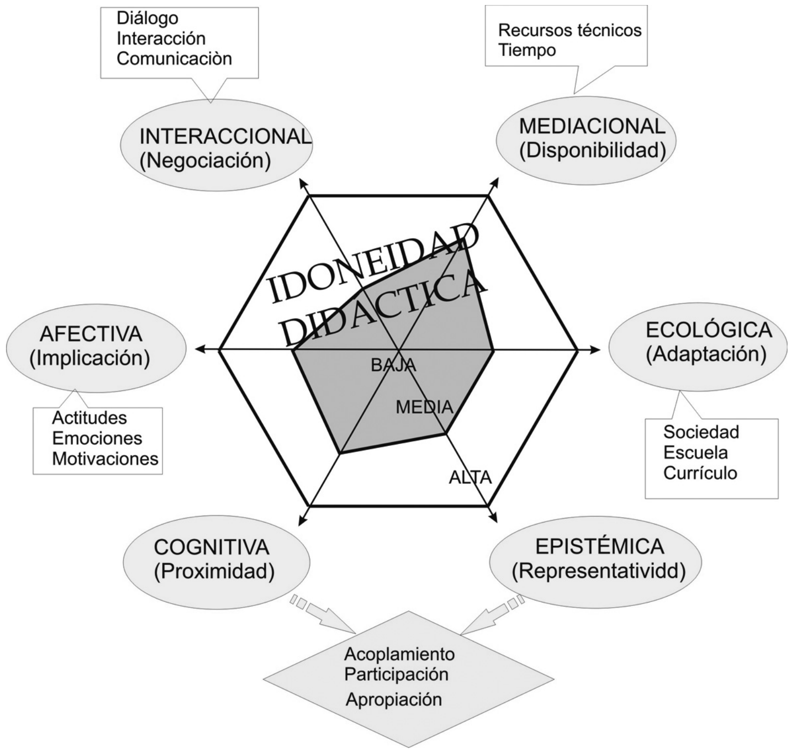


Figura 3. Componentes de la idoneidad didáctica

En la figura 3 resumimos los criterios que componen la idoneidad didáctica. Representamos mediante un hexágono regular la idoneidad correspondiente a un proceso de estudio pretendido o programado, donde *a priori* se supone un grado máximo de las idoneidades parciales. El hexágono irregular inscrito correspondería a las idoneidades efectivamente logradas en la realización de un proceso de estudio implementado.

Las herramientas descritas se pueden aplicar al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de clase, a la planificación o el desarrollo de una unidad didáctica, o a un nivel más global, como puede ser el desarrollo de un curso o una propuesta curricular. También pueden ser útiles para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio, como un material didáctico, un manual escolar, respuestas de estudiantes a tareas específicas o "incidentes didácticos" puntuales.

En Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006) analizamos diversos marcos teóricos usados en Didáctica de la Matemática desde el punto de vista del EOS, concretamente las nociones usadas para describir los fenómenos cognitivos y epistémicos en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD, Brousseau, 1998), Teoría de los Campos Conceptuales (TCC, Vergnaud, 1990), Dialéctica Instrumento-Objeto y Juegos de Cuadros (DIO-JC, Douady, 1986), Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD, Chevallard, 1992) y Registros de Representación Semiótica (RRS, Duval, 1995).

Incluimos a continuación una síntesis de las principales conclusiones obtenidas en dicho trabajo.

Supuestos sobre la naturaleza del conocimiento matemático

Consideramos que la naturaleza del saber matemático, en el sentido de "saber sabio" o saber en la institución matemática-profesional, no ha sido problematizada en las teorías discutidas. En la TAD, con la noción de praxeología y su dependencia de las instituciones, se atribuye una naturaleza relativa y plural al conocimiento matemático, como consecuencia de la adopción del marco antropológico, pero se continúa hablando de un "saber sabio" que se traspone a las instituciones de enseñanza, cuyo carácter no se explicita.

¿Es posible compaginar de manera coherente el relativismo antropológico con la visión platónica usual que atribuye un tipo de realidad absoluta y universal al conocimiento matemático? En Wilhelmi, Lacasta y Godino (en prensa) abordamos esta cuestión desde el enfoque ontosemiótico analizando, como ejemplo, las diversas definiciones de la noción de igualdad de números reales y los subsistemas de prácticas asociadas a las mismas. Proponemos que cada definición y la configuración de objetos y relaciones entre los mismos constituyen un sentido –o significado parcial– de la noción de igualdad de números reales (perspectiva sistémica), y que en última instancia, el significado matemático de la noción, en singular (perspectiva unitaria), debemos asociarlo a la estructura formal que describe los diversos significados parciales. El saber matemático, en singular, es una emergencia del sistema de prácticas matemáticas, realizadas en el seno de una comunidad de prácticas especial (matemática pura), ante el problema de la organización y estructuración de los subsistemas de prácticas implementados en diversos marcos institucionales, contextos de uso y juegos de lenguajes.

En el EOS la cuestión del "significado de los objetos matemáticos" es de naturaleza ontológica y epistemológica, esto es, se refiere a la naturaleza y origen de los objetos matemáticos. En un primer momento se propone una respuesta pragmática/antropológica —significado como sistema de prácticas operativas y discursivas—, pero simultáneamente se postula la emergencia de nuevos objetos de tales sistemas de prácticas que se concretan en reglas socialmente convenidas (y objetos personales), los cuales serán a su vez contenidos de nuevas funciones semióticas. Con esta formulación dualista –sistema de prácticas y objetos emergentes organizados en redes o configuraciones– se pretende articular los programas epistemológico (sobre bases antropológicas) y cognitivo (sobre bases semióticas).

Las visiones pragmática y realista sobre el significado, se suelen presentar como contrapuestas. Sin embargo, Ullmann (1962) presenta las teorías de tipo pragmático (que denomina operacionales o contextuales) como un complemento válido de las teorías de tipo realista (que denomina referenciales).

> *No hay ningún atajo hacia el significado mediante la introspección o cualquier otro método. El investigador debe comenzar por reunir una muestra adecuada de contextos y abordarlos luego con un espíritu abierto, permitiendo que el significado o los significados emerjan de los contextos mismos. Una vez que se ha concluido esta fase, se puede pasar con seguridad a la fase "referencial" y procurar formular el significado o los significados así identificados. La relación entre los dos métodos, o más bien entre las dos fases de la indagación, es, en definitiva, la misma que hay entre la lengua y el habla: la teoría operacional trata del significado en el habla; la referencial, del significado en la lengua. No hay, absolutamente, necesidad de colocar los dos modos de acceso uno frente a otro: cada uno maneja su propio lado del problema, y ninguno es completo sin el otro (*Ullmann, 1962, pp. 76-77).

Esta observación de Ullmann sirve de apoyo para el modelo de significado de los objetos matemáticos que se propone en el EOS. El significado comienza siendo pragmático, relativo al contexto, pero existen tipos de usos referenciales. En el EOS, de acuerdo con la visión antropológica sostenida por Wittgenstein (Bloor, 1983), los componentes teóricos del conocimiento matemático (conceptos, teoremas) se interpretan como reglas gramaticales para el manejo de las expresiones usadas para describir el mundo de objetos y situaciones extra o intramatemáticas.[18]

Relatividad ontosemiótica personal, institucional y contextual

Las teorías analizadas dan un peso muy diferente al aspecto personal e institucional del conocimiento matemático y a su dependencia contextual. En el EOS se postula que los sistemas de prácticas, los objetos emergentes

18 Esta es la manera en que se conciben los conceptos y teoremas en la filosofía de las matemáticas de Wittgenstein (Baker y Hacker, 1985).

y las configuraciones mediante las cuales se expresan, son relativos a los contextos de uso, a las instituciones en que tienen lugar las prácticas y a los sujetos implicados en las mismas (juegos de lenguaje y formas de vida, Wittgenstein, 1953).

La descripción de los conocimientos de un sujeto individual sobre un objeto O se puede hacer de una manera global con la noción de "sistemas de prácticas personales". Si en este sistema de prácticas distinguimos entre las que tienen una naturaleza operatoria o procedimental ante un tipo de situaciones-problemas, respecto de las discursivas, obtenemos un constructo que guarda una estrecha relación con la noción de praxeología (Chevallard, 1999), siempre y cuando le atribuyamos a dicha noción una dimensión personal, además de la correspondiente faceta institucional. También se puede incorporar de esta manera la dualidad "instrumento-objeto" que propone Douady para los conceptos matemáticos.

Los modos de "hacer y de decir" ante un tipo de problemas que ponen en juego, por ejemplo, el "objeto función", se proponen como respuesta a la pregunta "qué significa el objeto función" para un sujeto (o una institución). Esta modelización semiótica del conocimiento permite interpretar la noción de esquema como configuración cognitiva asociada a un subsistema de prácticas relativas a una clase de situaciones o contextos de uso, y las nociones de concepto-en-acto, teorema-en-acto y concepción como componentes parciales (intencionales) constituyentes de dichas configuraciones cognitivas.

En el EOS la noción de concepción es interpretada mediante el par (sistema de prácticas personales, configuración cognitiva) para sacar la cognición del sesgo mentalista. En términos semióticos, cuando nos preguntemos por el significado de "concepción" de un sujeto sobre un objeto O (o sostenida en el seno de una institución), asignemos como contenido "*el sistema de prácticas operativas y discursivas que ese sujeto manifiesta en las que se pone en juego dicho objeto*". Este sistema es relativo a unas circunstancias y momento dado, y se describe mediante la red de objetos y relaciones que se ponen en juego (*configuración cognitiva*).

Asimismo, la comprensión y el conocimiento se conciben en su faceta dual personal-institucional, involucrando, por tanto, los sistemas de prácticas operativas y discursivas ante ciertos tipos de tareas problemáticas. El aprendizaje de un objeto *O* por un sujeto, se interpreta como la apropiación de los significados institucionales de *O* por parte del sujeto; se produce mediante la negociación, el diálogo y acoplamiento progresivo de significados.

Cuando se considera el significado de un objeto matemático en términos de prácticas, tal como se propone en el enfoque ontosemiótico, es posible distinguir entre *sentido y significado*. Se entiende el *sentido* como un *significado parcial*. El significado de un objeto matemático, entendido como conjunto de prácticas, se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto (que activará una determinada configuración). Cada contexto ayuda a generar sentido (permite generar un subconjunto de prácticas), pero no genera todos los sentidos.

La noción de representación y la de registro semiótico, usadas por Duval y otros autores, hacen alusión –según nuestro modelo– a un tipo particular de función semiótica representacional entre objetos ostensivos y objetos mentales (no ostensivos). La noción de función semiótica generaliza esta correspondencia a cualquier clase de objetos y, además, contempla otros tipos de dependencias entre objetos.

El uso que se hace en Teoría de Situaciones Didácticas de la noción de sentido, queda restringido a la correspondencia entre un objeto matemático y la clase de situaciones de la cual emerge, y "le da su sentido" (podemos describirlo como "significado situacional"). Según el EOS, esta correspondencia es crucial, sin duda, al aportar la razón de ser de tal objeto, su justificación u origen fenomenológico, pero también se tienen que tener en cuenta las correspondencias o funciones semióticas entre ese objeto y los restantes componentes operativos y discursivos del sistema de prácticas del que consideramos sobreviene el objeto, entendido en términos cognitivos o bien, en términos epistémicos.

La Teoría de los Campos Conceptuales extiende la noción de significado como "respuesta a una situación dada", introducida en Teoría de Situaciones Didácticas. Esta extensión supone la inclusión, además, del componente situacional, de elementos procedimentales (esquemas) y discursivos (conceptos y teoremas en acto), relacionando además el significado con la noción de *modelo implícito*.

El contenido que se considera "*significado de un objeto matemático para un sujeto*" en la TCC, es prácticamente la globalidad holística que nosotros describimos como "sistema de prácticas personales". Sin embargo, nuestra noción de función semiótica y la ontología matemática asociada proporcionan un instrumento más general y flexible para el análisis didáctico-matemático.

Niveles de análisis de la cognición matemática

La didáctica debe identificar, no solo los fenómenos relativos a la ecología de los saberes matemáticos (objetivo principal de la TAD) o los correspondientes al diseño e implementación de ingenierías didácticas (objetivo principal de la TSD), sino también los fenómenos relativos al aprendizaje de los alumnos. En última instancia, los esfuerzos de los profesores e investigadores convergen en el objetivo de lograr que los estudiantes aprendan, esto es, se apropien de los conocimientos matemáticos que les permitan desenvolverse en la sociedad y, en algunos casos, contribuyan al desarrollo de nuevos conocimientos. El abordaje de cuestiones como ¿por qué los alumnos tienen dificultades en resolver este tipo de tareas?, ¿es idónea esta tarea, este discurso matemático, para estos alumnos en unas circunstancias dadas?, etc., supone un nivel "microscópico" de análisis de fenómenos cognitivos y didácticos, y requiere usar nociones teóricas y metodológicas específicas.

Las nociones de esquema, conceptos y teoremas en actos que proponen la TCC y la RRS se orientan en esa dirección. Ahora bien, ¿son suficientes estas nociones para este aspecto del trabajo didáctico? Consideramos que la noción de "configuración cognitiva" que propone el EOS con su desglose en entidades situacionales, lingüísticas, procedimentales, conceptuales, proposicionales y argumentativas, permiten un análisis más fino del aprendizaje matemático de los estudiantes. La noción de configuración, en su versión epistémica, permite también hacer análisis microscópicos de los objetos matemáticos, caracterizar su complejidad ontosemiótica y aportar explicaciones de los aprendizajes en términos de dicha complejidad.

El EOS permite estudiar los hechos y fenómenos a nivel microscópico, incluso fenómenos que puede calificarse de singulares. ¿Qué ocurre aquí y ahora? ¿Por qué ocurre? ¿Qué aprende –o deja de aprender– este alumno en estas circunstancias? Aportar respuestas a estas cuestiones puede ser un primer paso para generar hipótesis referidas a otros alumnos y circunstancias. Para hacer este tipo de análisis, el EOS introduce las dualidades cognitivas: elemental-sistémica; ostensiva-no ostensiva; extensiva-intensiva; expresión-contenido (función semiótica).

Por otra parte, las nociones de sistema de prácticas (praxeología u organización matemática), instituciones, marcos y contextos de uso y ecología de significados, son nociones apropiadas para realizar análisis de tipo macroscópico (curricular, instruccional).

La noción de *conflicto semiótico*, cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa, es también útil para la realización tanto de análisis de nivel macro como de nivel microdidáctico en la producción y comunicación matemática.

Ejemplos de investigaciones

En este apartado describimos de manera resumida dos ejemplos de investigaciones realizadas en el marco del EOS. Otros ejemplos de investigaciones experimentales realizadas desde la perspectiva ontosemiótica, publicadas en diversas tesis de doctorado, artículos y monografías, están disponibles en la página web del Grupo de Investigación de *Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística* de la Universidad de Granada: http://www.ugr.es/local/jgodino; http://www.ugr.es/local/batanero, así como en la página web de V. Font: http://www.webpersonal.net/vfont/RDMfinal.pdf

Caracterización del razonamiento combinatorio elemental

En el artículo de Godino, Batanero y Roa (2005), publicado en *Educational Studies in Mathematics* (vol. 60, (1), 3-36), se describen las principales nociones teóricas del EOS con ejemplos relativos al campo de problemas de combinatoria elemental y se analizan las respuestas dadas por cuatro estudiantes de último curso de la licenciatura de matemáticas a un problema de combinatoria.

Los tipos de objetos matemáticos (problemas, lenguaje) y las facetas cognitivas (extensivo-intensivo, ostensivo-no ostensivo) se usan para desarrollar la técnica de análisis ontosemiótico que permite caracterizar los significados institucionales (respuestas a los problemas elaboradas desde un punto de vista experto) y los significados personales de los estudiantes.

En este artículo se utilizan datos de la tesis doctoral de Roa (2000) correspondientes a las respuestas de cuatro sujetos a uno de los problemas propuestos. En la investigación se aplicó un cuestionario formado por 13 problemas combinatorios elementales (11 problemas que ponen en juego solo una operación combinatoria y 2 problemas compuestos en los que intervenían dos operaciones). Este cuestionario se aplicó a una muestra de 90 estudiantes con preparación matemática avanzada y se analizó utilizando técnicas cuantitativas y cualitativas (estudio de casos mediante entrevistas).

El análisis realizado permite identificar los conocimientos puestos en juego por los alumnos –correcta o incorrectamente– en la resolución del siguiente problema:

> *Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (azul, blanco, verde y rojo) y decide repartírselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede repartir los coches a sus hermanos? Ejemplo: Podría dar los cuatro coches a su hermano Luis*.

Los resultados pusieron de manifiesto la complejidad de la tarea de resolución de este problema, aparentemente sencillo, así como la diversidad entre los cuatro alumnos, lo que refleja una variedad del significado (sistémico) de la combinatoria elemental para los mismos. En el proceso de resolución se producen conflictos semióticos que llevan a error, debido a la disparidad entre el modelo de selección en que estos alumnos han aprendido las definiciones combinatorias y las diversas situaciones (como, por ejemplo, en un problema de partición) en que deben ser aplicadas dichas definiciones.

Del análisis de los protocolos de resolución de este problema por los cuatro alumnos, se infiere que la actividad de resolución de los problemas requiere una diversidad de objetos matemáticos; estos objetos varían de uno a otro alumno. Aunque, debido a las restricciones de espacio el artículo solo incluye el análisis de un problema, este mismo proceso fue repetido con los 12 problemas restantes, poniendo de manifiesto la pluralidad de conocimientos usados por los alumnos en la solución de los problemas, que para cada uno de ello constituye el *significado personal* (sistémico) de la combinatoria elemental.

El problema de la enseñanza y el aprendizaje de la derivada

Describimos la investigación realizada en la tesis doctoral de V. Font, en el marco teórico del enfoque ontosemiótico, sobre cuestiones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la derivada por estudiantes de bachillerato (16-17 años). Usaremos como referencia el artículo publicado en *Recherches en Didactique des Mathématics,* (Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005), con el título *Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal*.

En este trabajo se usa la noción de "significado institucional" entendido como sistema de prácticas, para diseñar, implementar y analizar una experiencia de estudio de la derivada, distinguiendo cuatro tipos de tales significados sistémicos: de referencia, pretendido, implementado y evaluado. También se recoge información detallada de las prácticas personales de los estudiantes, que permiten caracterizar sus significados propios iniciales, finales y algunos aspectos de su construcción progresiva.

Entre las conclusiones sobre el desarrollo y análisis de la experiencia de enseñanza, destacan las siguientes:

- La consideración conjunta de la complejidad semiótica, los conflictos semióticos potenciales y la necesidad de actividades que partan de los conocimientos previos de los alumnos, llevan a proponer significados pretendidos que se concretan en unidades didácticas cuya implementación necesita muchos recursos temporales. Por este motivo, resulta difícil hacerlas compatibles con las restricciones materiales y temporales reales.
- El significado personal de objetos que se suponía que los alumnos habían estudiado previamente (función, variación de una función, pendiente, tasa media de variación, velocidad, etc.) era insuficiente. De aquí se deduce que una buena manera de asegurar que los alumnos adquieren un buen significado personal del objeto derivada consiste en conseguir un buen significado personal de dichos objetos previos.
- La definición de la función derivada como límite de las tasas medias de variación presenta una gran complejidad semiótica.
- El hecho de diseñar un significado pretendido que incorporaba prácticas que permitían calcular la expresión simbólica de funciones derivadas a partir de gráficas [de $f(x)$ o de $f'(x)$], modificó los significados de los objetos personales "funciones elementales" de los alumnos. Al finalizar el proceso de estudio, el significado personal de la mayoría de alumnos incorporaba prácticas que permitían obtener expresiones simbólicas de funciones elementales a partir de sus gráficas. Dichas prácticas no formaban parte del significado de sus objetos personales "funciones elementales" antes del proceso de instrucción, ni habían sido explícitamente contempladas en el diseño previo del significado pretendido.

La noción de función semiótica, junto con las dualidades cognitivas extensivo-intensivo, expresión-contenido, son utilizadas de manera sistemática para analizar la complejidad ontosemiótica de la definición de derivada en un punto y función derivada. Este análisis permite identificar conflictos semióticos potenciales –que son tenidos en cuenta en el diseño de la experiencia– y como explicación de algunas dificultades persistentes en la comprensión de dichas nociones.

Concebimos las teorías como instrumentos que permiten definir los problemas de investigación así como una estrategia metodológica para su abordaje. El sistema de nociones teóricas y metodológicas que necesitamos elaborar para caracterizar los fenómenos didácticos, deberá permitir diferentes niveles de análisis de las diversas dimensiones o facetas implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este sistema no puede elaborarse con la simple agregación de elementos teóricos y metodológicos de distintos enfoques disponibles, sino que será necesario diseñar otros nuevos más eficaces, enriqueciendo algunas nociones ya elaboradas, evitando redundancias y conservando una consistencia global. Debemos aspirar a incluir en dicho sistema las nociones teóricas y metodológicas "necesarias y suficientes" para investigar la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El EOS viene creciendo como marco teórico para la didáctica de las matemáticas impulsado por problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y la aspiración de articular las diversas dimensiones y perspectivas implicadas. Este trabajo de articulación no puede hacerse mediante la superposición de herramientas de distinta procedencia. Steiner (1990) sitúa la disciplina Educación Matemática en el centro de un sistema social, heterogéneo y complejo –el Sistema de Enseñanza de las Matemáticas– y menciona como ciencias referenciales para nuestra disciplina a la propia matemática, la epistemología, psicología, pedagogía, sociología, lingüística, entre otras. Cada una de estas disciplinas se ocupa de aspectos parciales de los problemas que plantea la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, usando para ello sus propias herramientas conceptuales y metodológicas.

El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de los objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado, pero teniendo en cuenta además la dimensión cognitiva individual.

Consideramos que el EOS puede ayudar a comparar los marcos teóricos usados en Didáctica de las Matemáticas y, en cierta medida, a superar algunas de sus limitaciones para el de análisis de la cognición e instrucción matemática. En principio, se trata de una expectativa que se basa en la generalidad con la que se define en el EOS las nociones de problema matemático, práctica matemática, institución, objeto matemático, función semiótica y las dualidades cognitivas (persona-institución; elemental-sistémico; ostensivo-no ostensivo; extensivo-intensivo; expresión-contenido). Estas nociones nos permiten establecer conexiones coherentes entre los programas epistemológicos y cognitivos sobre unas bases que describimos como ontosemióticas.

El papel central dado en el EOS a la *práctica* matemática (en su versión institucional, esto es, relativa a juegos de lenguaje y formas de vida) y las características que se le atribuyen a dicha noción (acción compartida, situada, intencional, mediada por recursos lingüísticos y materiales) permiten, en nuestra opinión, una articulación coherente con otras posiciones teóricas, como el constructivismo social (Ernest, 1998), la socioepistemología (Cantoral y Farfán, 2003) y en general las perspectivas etnomatemáticas y socioculturales en educación matemática (Atweh, Forgasz y Nebres, 2001).

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación y Fondos FEDER. Madrid.

Referencias bibliográficas

Anderson, M.; Sáenz-Ludlow, A.; Zellweger, S. y Cifarelli, V. C. (Eds). (2003). *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing*. Otawa: Legas.

Atweh, B.; Forgasz, H. y Nebres, B. (2001). *Sociocultural research on mathematics education. An international perspective*. London: Lawrence Erlbaum.

Austin, J. L. (1982). *Cómo hacer cosas con palabras: palabras y acciones*. Barcelona: Paidós.

Baker, G. P. y Hacker, P. M. S. (1985). Wittgenstein. *Rules, grammar and necessity. An analytical commentary on the philosophical investigations*. Glasgow: Basil Blackwell.

Bloor, D. (1983). *Wittgenstein. A social theory of knowledge*. London: The Macmillan Press.

Blumer, H. (1969). *El interaccionismo simbólico: perspectiva y método*. Barcelona: Hora, 1982.

Brousseau, G. (1998). *La téorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamerica de Investigación en Matemática Educativa*, 6(1), 27-40.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.

________________ (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19(2), 221-266.

Contreras, A. ; Font, V. ; Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(2), 151–186.

D'Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. La posición "ingenua" en una teoría "realista" "versus" el modelo "antropológico" en una teoría "pragmática". *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 27, 51-76.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et penseé humaine*. Berna: Peter Lang.

Eco, U. (1995). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen, 1976.

Ernest, P. (1994). Varieties of constructivism: their metaphors, epistemologies and pedagogical implications. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 2, 1-14.

__________ (1998). *Social constructivism as a philosopy of mathematics*. New York: SUNY.

Faerna, A. M. (1996). *Introducción a la teoría pragmatista del conocimiento*. Madrid: Siglo XXI.

Font, V. (2001). Processos mentals versus competència, *Biaix* 19, 33-36

___________ (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Revista EMA*, 7(2), 127-170.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1), 7-33.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meaning, and understanding. En: L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education (2-417-424), Universidad de Valencia.

__________________ (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22(2/3), 237-284.

__________________ (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

__________________ (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En: A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.). *Mathematics education as a research domain: a search for identity* (177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 3-36.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26(1), 39-88.

Godino, J. D. y Recio, A. M. (1998). A semiotic model for analysing the relationships between thought, language and context in mathematics education. En: A. Olivier y K. Newstead (Eds.). *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3: 1.8. University of Stellenbosch, South Africa.

Hjelmslev, L. (1943). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje*. Madrid: Gredos, 1971.

Lakatos, I. (1983). *La metodología de los programas de investigación científica*. Madrid: Alianza.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Otte, M. (2003). Does mathematics have objects? In what sense? *Synthese,* 134, 181-216.

Peirce, C. S. (1931-1958). *Collected Papers*, vols. 1-8, C. Hartshorne, P. Weiss y A. W. Burks (Eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Peirce, Ch. S. (1965). *Obra lógico-semiótica*. Madrid: Taurus, 1987.

Radford, L. (2006). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 39-65.

Sáenz-Ludlow, A. y Presmeg, N. (2006). Semiotic perspectives on learning mathematics and communicating mathematically. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 1-10.

Saussure, F. (1915). *Curso de lingüística general*. Madrid: Alianza, 1991.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* 22, 1-36.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being–Or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. En: P. Cobb; E. Yackel y K. McCain (Eds.). *Symbolizing and communicating in mathematics classroom* (37- 97). London: LEA.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En: A. J. Bishop et al. (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education* (827-876). Dordrecht: Kluwer A. P.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 133-162.

Steiner, H. G. (1984). Balacheff, N. *et al*. (Eds.) *Theory of mathematics education (TME)*. *ICME 5*. Occasional paper 54. Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

__________________ (1985). Theory of mathematics education (TME): an introduction. *For the Learning of Mathematics*, Vol 5. No. 2, 11-17.

Ullmann, S. (1962). *Semántica. Introducción a la ciencia del significado*. Madrid: Aguilar, 1978.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10(2,3), 133-170.

Wilhelmi, M. R.; Lacasta, E. y Godino, J. D. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 27(1), 77-120.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.

El lenguaje en las matemáticas escolares

Dora Inés Calderón[1]

Este artículo presenta elementos para la hipótesis de que el lenguaje es un aspecto central en el aprendizaje de las matemáticas y que, en este sentido, requiere ser considerado desde dos perspectivas complementarias: la discursiva y la sistémica. La primera, explica el escenario de la configuración de los sujetos discursivos de las matemáticas escolares como una esfera de la comunicación didáctica de las matemáticas con su respectivo género discursivo. La segunda, permite comprender el papel del lenguaje en la construcción del conocimiento matemático escolar, por cuanto, de acuerdo con Pimm (1990), las matemáticas son, además, un lenguaje y, como tal, constituyen un desarrollo del lenguaje natural.

Introducción

Los puntos de partida

La conversación con los maestros siempre será una gran motivación y, por supuesto, un reto para dar sentido a la investigación educativa. El oído del maestro se convierte en la medida exigente que puede indicarnos cuándo un discurso teórico cumple con ser un apoyo para la interpretación de los fenómenos escolares. A este reto es al que intentaré responder en esta oportunidad y el que me parece el primero y el más importante punto de partida para la presente reflexión.

El segundo punto de partida lo constituye el análisis de una perspectiva transdisciplinar del lenguaje, como un aporte a la didáctica del lenguaje y las matemáticas. En este segundo punto encuentro una convergencia de intereses y de preguntas didácticas y, quizás, el sentido más claro para esta conversación.

Es un hecho, aunque no siempre se logra, que considerar el análisis de la relación lenguaje-matemáticas-escuela plantea la exigencia de una reflexión de tipo interdisciplinar y de tipo didáctico. Por esta razón, propongo

1 Profesora del Doctorado Interinstitucional en Educación en los Énfasis de Lenguaje y de Matemáticas y miembro de Grupo de Investigación Interdisciplinaria en Pedagogía del Lenguaje y las Matemáticas-GIIPLyM. Correo electrónico: doracald@yahoo.es

establecer los aspectos que han de ser tenidos en cuenta en este marco de relaciones:

1. Del lenguaje. El papel que cumple en la configuración del sujeto discursivo y en la elaboración y producción de conocimiento.
2. De las matemáticas escolares. Las formas discursivas particulares que emergen, tanto del anclaje disciplinar de las matemáticas como de las relaciones curriculares y didácticas, y de los propósitos para el aprendizaje matemático planteados por el maestro en cada aula.

A partir de los anteriores aspectos, me propongo avanzar desde la premisa de que en este campo de relaciones el *lenguaje* es *transversal* y *transdisciplinar* (Bajtín, 1982). Así, vale la pena advertir al lector que esta reflexión se presenta desde la perspectiva del lenguaje y, más específicamente, del lenguaje como discurso (Bajtín, 1982; Charaudeau, 2005; Martínez, 2005; Calderón, 2005). Además, que tiene por finalidad contribuir a la discusión sobre la relación existente entre el desarrollo del lenguaje y el del conocimiento, en este caso el matemático. Adicionalmente, que los aspectos identificados en esta relación, se han obtenido en el marco de la investigación sobre el desarrollo de procesos argumentativos en geometría, en estudiantes de niveles avanzados de la educación media y de primeros semestres de universidad.[2]

Iniciemos recordando que, para la comprensión del papel de la educación en el desarrollo del sujeto social, considerar el lenguaje es fundamental dada la estrecha relación que éste tiene con el desarrollo del pensamiento y del conocimiento (Vigotsky, 1988). En esta perspectiva, tomando el lenguaje como potencial semiótico y noético (Duval, 1999), es posible reconocer en él tres dimensiones (Calderón, 2005):

- La ética, que vincula sujeto discursivo y aspectos de tipo normativo, axiológico y actitudinal de la comunicación y de la significación compartidas socialmente.
- La psicológica, considerando el lenguaje como acción humana, que pone en juego aspectos de tipo cognitivo y de tipo semiótico e informativo; es decir, el desarrollo de procesos de significación que exigen el permanente proceso de semiotización.
- La social del lenguaje, que destaca las funciones comunicativa e interactiva del lenguaje.

Estas tres dimensiones, que sólo separamos para efectos analíticos, están presentes en toda producción y desarrollo discursivo; de ahí la importancia

2 Ver tesis doctoral de la autora *Dimensión cognitiva y comunicativa de la argumentación en matemáticas*. Cali: Universidad del Valle, 2005.

de tenerlas en cuenta para efectos de los análisis de los corpus discursivos obtenidos en las investigaciones del discurso en el aula, en aras de la comprensión de los distintos aspectos manifiestos en la discursividad de los hablantes.

Desde estas tres dimensiones, proponemos considerar la relación que más nos interesa: lenguaje y desarrollo de conocimiento matemático en la escuela. Para ello, en primer lugar analizaremos *el contexto de la comunicación discursiva de lo matemático* como el espacio de configuración de los sujetos discursivos escolares: la voz, la opinión, el rol y la relación interlocutiva en la interacción y en la esfera de comunicación social del aula. En segundo lugar, intentaremos establecer características del lenguaje matemático como desarrollo del lenguaje natural.

Lenguaje y desarrollo del sujeto social

En nuestra investigación, la idea que sostiene la relación entre lenguaje y desarrollo de sujeto social ha sido fundamentada en dos vertientes teóricas, a nuestro juicio, complementarias: el social-constructivismo vigotskyano y la filosofía del lenguaje de Mijail Bajtín (Ponzio, 1998). En esta idea resulta central la relación entre sujetos sociales y prácticas discursivas en los contextos socio-culturales. Por esta razón, la noción de género discursivo bajtiniano cobra un gran valor analítico que intentamos explicitar a continuación.

Género discursivo y sujeto socio-escolar

El género discursivo se postula como la expresión de una práctica social de tipo discursiva que ocurre *en una esfera de comunicación social,* más o menos institucionalizada, configurada y configurante por y de formas prototípicas del discurso, que dan razón de tales prácticas sociales. Adicionalmente, la realización de tales prácticas se produce en el marco de situaciones de comunicación particulares, mediadas por un *contrato de comunicación*[3] e intercambio verbal. Esto significa que, como afirma Charaudeau (2005)[4], a una situación de comunicación subyace un contrato de comunicación implícito que regula la actuación discursiva de los interlocutores.

3 La noción de contrato de comunicación ha sido desarrollada en mayor profundidad por P. Charaudeau (1992, 1999) y por María Cristina Martínez (1997, 1999, 2000, 2004), entre otros.

4 En el marco del *Seminario Internacional para el fomento de la argumentación razonada en la comunicación oral y escrita*, que se llevó a cabo en la Universidad del Valle en Cali (Colombia) en junio de 2005.

Esta idea supone reconocer, en el género discursivo, el problema de la configuración de los distintos sujetos discursivos y de los diferentes discursos en las diversas esferas de la praxis social y sus particulares contratos de comunicación en el contexto del diálogo social. Así, podemos identificar esferas sociales de comunicación más estables e institucionalizadas y, por ello, distinguibles de otras menos estables, en consecuencia, a veces imperceptibles. Por ejemplo, la esfera pedagógica, la jurídica, la política, la científica, la médica, la deportiva, la familiar, la laboral, etc., como muy estables e identificables fácilmente. Otras, como la del juego, la de la conquista amorosa, la de la juerga, la de la protesta política o social, la de los protocolos sociales menos ritualizados (visitas sociales, fiestas de amigos, etc.), son menos estables y dependen de diversos aspectos socioculturales (dialectales, sociolectales, diastráticos, diafásicos, la moda, etc.) (Calderón, 2003).

Sobre las prácticas socio discursivas que configuran las distintas esferas de comunicación social, vale la pena agregar que, si bien pueden ser identificadas y separadas unas de otras, también se mezclan, se cruzan, se amalgaman, dependiendo de las situaciones de comunicación que se construyan socialmente en ellas y entre ellas. Además, tales prácticas son de tipo responsivo y de carácter polifónico. Cada vez que se realiza un sujeto discursivo (como enunciador o como enunciatario) se identifica, se postula y contribuye activamente a la construcción y al cambio de las significaciones sociales en la esfera de comunicación dada, puesto que "*cada esfera de la comunicación discursiva posee su propia concepción de destinatario, la cual lo determina como tal*" (Bajtín, 1982, p. 285). En este sentido, cobra vital importancia la afirmación bajtiniana que reza:

> *en la realidad, cualquier comunicado va dirigido a alguien, está provocado por algo, tiene alguna finalidad, es decir, viene a ser un eslabón real en la cadena de la comunicación discursiva, dentro de una esfera determinada de la realidad cotidiana del hombre* (Ibídem, p. 273).

Desde lo anterior, es posible decir que el género discursivo puede ser considerado como un *campo semiótico-discursivo* estructurado y determinado por el tipo de prácticas sociales, el tipo de enunciadores que requiere y que configura y las *formas de enunciación* y de construcción de significaciones, propias de la práctica social específica. No alude –en primera instancia– a formas lingüísticas o textuales, aunque se expresa en ellas; tampoco se resuelve en la sola explicación de los tópicos o temas que trabaja. Por el contrario, las formas lingüísticas y los temas que intervienen en un género discursivo, resultan ser expresión y construcción del mismo género. La teoría bajtiniana propone que el género discursivo es expresión verbal, relativamente estable, cuya unidad es el enunciado, que estructura un *tipo temático* (los asuntos de que trata), un *tipo composicional* (las formas discursivas prototípicas) y un *tipo estilístico* (la entonación discursiva); de ahí que está determinado por la situación discursiva, la posición social, la relación entre los participantes y la entonación discursiva.

Traslademos al aula de matemáticas esta idea del género discursivo y sus implicaciones en la configuración del sujeto discursivo de las matemáticas escolares. Una primera y definitiva conclusión en esta perspectiva de análisis, es el reconocimiento de que el aula, como otros espacios de interacción social, se constituye en una esfera de comunicación; además, que está inmersa en una esfera más amplia que es la esfera pedagógica.[5] Como efecto de este reconocimiento, naturalmente también estamos ante un género discursivo propio de esta esfera social: **el género discursivo didáctico** (Calderón, 2005; León, 2005).

El género discursivo didáctico en matemáticas

Postular un género discursivo didáctico en matemáticas es, entonces, reconocer una esfera particular en la que se configura y se desarrolla un sujeto discursivo en relación con unas prácticas socio-discursivas de tipo matemático. En los términos anteriores, el aula constituye una esfera de la comunicación social bien delimitada por cuanto:

i) Plantea roles sociales bien diferenciados como el de profesor y el de estudiante.

Al respecto, es importante tener en cuenta que la categoría "rol social" –o rol discursivo– es una categoría abstracta, constituida a partir del reconocimiento y la diferenciación de las características y las condiciones que configuran un actor social representativo de una esfera de comunicación social bien definida. Actor que puede ser encarnado por sujetos empíricos (Ducrot, 1988) en distintos momentos y en tiempos diferentes. Así, un sujeto empírico puede, en un momento desempeñar el rol de profesor y en otro el de estudiante. En cada caso tal sujeto reconoce y encarna este rol de acuerdo con el canon (las reglas de comportamiento socio-discursivo) que sociológicamente le es reconocido a este rol. Así, fundamentalmente el profesor "enseña" y el estudiante "aprende"[6] y, a partir de esta relación

5 Para ampliar esta idea, ver tesis doctoral de la autora (2005) y la de Olga Lucía León, 2005.

6 Las comillas son puestas aquí para señalar que los dos términos son polémicos en distintas opciones explicativas de la actividad propia del profesor y la del estudiante. No obstante, esta no es la discusión que nos ocupa en este momento. Tan solo tendremos en cuenta que se hace necesario diferenciar el hacer del profesor y el del estudiante.

básica, se configuran los modos y las prácticas discursivas que les son propias a esta relación.

El desempeño de roles es aprendido por los sujetos por la vía de su participación social en los contextos de comunicación, y es comprendido y explicado por la vía de la escolarización o de las acciones explicativas propias o en el marco de las relaciones sociales destinadas a este fin (por ejemplo, los adultos explican a los niños lo que hace un profesor, un médico, un abogado, un sacerdote, etc.). Desde este punto de vista, la posibilidad de desempeñar roles sociales es, interpretando a Vigotsky, una oportunidad configuradora y configurante de sujetos discursivos. Para ello, en particular el contexto escolar, ha de propiciar la ocurrencia de experiencias claras para la comprensión y la realización de los roles que, tanto en la escuela como en otros contextos, son necesarios para la vida social del individuo.

Pero más allá de la necesidad de comprender y de actuar adecuadamente los roles de profesor y de estudiante, propios de las relaciones del aula, es importante plantear en este momento que, desde un punto de vista ético-discursivo-práctico, cada uno de estos dos roles sociales, y ambos en estrecha relación, constituyen, por excelencia, el escenario de la relación natural del aula: la de enseñanza y aprendizaje. No existen, en la esfera de la comunicación didáctica, el uno sin el otro. En esta medida, estos dos roles son completamente polifónicos y dialógicos: en su función social se distinguen claramente tanto la voz de maestro o de profesor, es decir la voz de autoridad epistémica, como la voz de estudiante, del aprendiz. A la vez, el enunciado del profesor siempre es dirigido al estudiante; el del estudiante siempre es dirigido al profesor; aunque, algunas veces, tanto en un caso como en otro, esta dirección quede implícita.

Por las razones anteriores, la experiencia en cada uno de estos roles, para unos y otros sujetos, requiere del desarrollo de un conjunto de: actitudes, aptitudes, conocimientos y formas discursivas que, en general, constituyen una base importante en los procesos de enseñanza (cualificación del discurso instruccional y regulativo) de parte del profesor y de procesos de aprendizaje más efectivos, de parte del estudiante (capacidad de preguntar, de analizar, de relacionar, etc.).

A propósito del rol de profesor, vale la pena destacar que, en el marco de las teorías de la educación –las que se interesan por el conocimiento profesional del profesor (Godino, 2008, 2009; Giménez, 2002; Tamir, 2005, entre otros) y las que se refieren al desarrollo de competencias pedagógica y didáctica en el profesor (Jorba y otros, 2000; Núñez, 2008; Calderón, 2005)– pueden apoyar, de manera singular, lo que concierne a la comprensión y el desarrollo de este rol. Por su parte, las teorías sobre desarrollo de competencias en los campos de saberes escolares, por ejemplo en matemáticas (Calderón y León, 2001, 2003; D'Amore, 2006; Godino y Batanero, 2009; entre otros), contribuyen a configurar, en particular, las condiciones epistémicas del rol del estudiante.

ii) Sustenta un tipo temático preciso.

En la teoría del género discursivo, el tipo temático hace alusión al campo de saber configurador y configurante del género, que produce un tipo de tematizaciones particulares (Calderón, 2005). En este caso, corresponde al área del saber escolar específico de las matemáticas. Es decir, trata los asuntos referidos a contenidos curriculares y didácticos de las matemáticas escolares, en un contexto macro estructural.

Así pues, las tematizaciones del género discursivo didáctico en matemáticas convocan aspectos referidos a la educación matemática desde diversos puntos de vista: filosófico, disciplinar, histórico, sociocultural, antropológico, psicológico, metodológico, didáctico, etc. Este cúmulo de relaciones temáticas conforma el conocimiento compartido socialmente, como el que es propio del campo de la educación matemática y que ha de revelarse en las prácticas didácticas en matemáticas. Tales tematizaciones se realizan por diferentes vías o prácticas socio-discursivas de tipo curricular y didáctico, y con el soporte de instancias institucionales y de instrumentos y mecanismos creados para operacionalizar los desarrollos temáticos propios de la esfera pedagógica y didáctica en matemáticas.

Ejemplos de la manifestación de las tematizaciones de las matemáticas escolares son la producción de teorías y de resultados de investigaciones sobre la educación matemática, la publicación de políticas educativas para las matemáticas –lineamientos curriculares, estándares curriculares, libros de texto, guías, entre otros–, la construcción de referentes institucionales para el área de matemáticas –planes de área, planes de curso, diseños de tareas, de materiales etc.–. Así pues, en el plano de las tematizaciones se encuentra el gran marco discursivo de lo que constituye el saber de las matemáticas escolares; es decir, el resultado de la selección, la organización y la secuenciación de contenidos matemáticos que las voces autorizadas han considerado como los constitutivos de la escolarización en el área de matemáticas a lo largo de la historia y de los distintos grados y niveles de escolaridad.

Desde el punto de vista anterior, en la definición de las tematizaciones de esta esfera discursiva se plantea una fuerte relación entre el campo disciplinar de las matemáticas y el campo pedagógico y didáctico, configurándose un nuevo marco de tematizaciones circunscrito a la macro esfera pedagógica y a la micro esfera didáctica. Entre los modos de tematizar en matemáticas y los empleados en la pedagogía y en la didáctica de las matemáticas, ocurren diálogos temáticos y diferencias discursivas que permiten distinguir las esferas respectivas.

Por otra parte, el modo de circulación y de comunicación de estas tematizaciones es diverso: mediante prácticas discursivas relacionadas con la investigación pedagógica y didáctica o con las prácticas orales y escritas de los docentes de matemáticas, y con el apoyo de espacios como las universidades, los grupos de investigación y/o de estudio, etc., las bibliotecas físicas y virtuales y los escenarios de formación y de discusión académica. A modo de ilustración, propongo hacer el ejercicio de seguir la pista de la circulación de tematizaciones de la esfera didáctica de las matemáticas en tres escenarios de la misma; para ello tomemos un tema de la geometría: relaciones entre áreas.

a) Primer escenario: un congreso de educación matemática. En este espacio se da la exposición de un investigador sobre procesos de aprendizaje de la geometría en grados de enseñanza secundaria. Su exposición propone resultados de investigación sobre cómo resuelven problemas de suma de áreas los estudiantes de 9° grado de una institución educativa. Presenta el proceso de investigación y las teorizaciones al respecto. Es decir, se ofrece un punto de vista sobre el aprendizaje de la geometría; un modo de lectura del tema (figuras, áreas, magnitudes), un tipo de relaciones y una propuesta de interpretaciones de fenómenos (actuación de los estudiantes) y de teorías alrededor de este tema.

b) Segundo escenario: el Documento No. 3. *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: MEN, 2006. En la página 86 alude a:

> *Estándares básicos de competencias en Matemáticas. Octavo a noveno. Pensamiento espacial y sistemas geométricos (estándares dos y tres): reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).*
>
> *Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.*

Obsérvese el modo discursivo que toma la tematización, empezando por los tipos de nominación:

"Estándar básico": el mínimo alcanzable en este aspecto y para estos grados, de acuerdo con el lenguaje curricular de la política educativa colombiana.

"Competencia en matemáticas": alude a un hacer propio de un campo disciplinar, de acuerdo con el lenguaje curricular de la política educativa colombiana.

"Octavo a noveno": sitúa grados de escolaridad a los que corresponde el saber aludido, de acuerdo con la nominación tomada en el currículo colombiano;

"Pensamiento espacial y sistemas geométricos": nomina el campo temático (de las matemáticas) acuñado curricularmente;

"Propiedades y relaciones geométricas… demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales)… congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas": nominación específica de los temas y procesos de geometría por tratar en este grado.

Este escenario presenta un marco de relaciones temáticas: contenidos y procesos, que han de ser atendidos por el profesor.

c) Tercer escenario: la clase del profesor de matemáticas de 8° grado. Su discurso sobre el tema de suma de áreas, su propuesta de tareas (problemas al respecto) y su sistema de evaluación de la clase. Evidentemente, los dos escenarios anteriores influirán en la construcción de las tematizaciones por parte del profesor y en la puesta en escena dentro del aula.

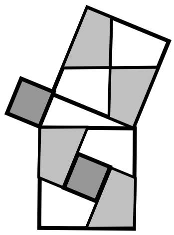
En síntesis, desde el punto de vista de las tematizaciones, tenemos un universo temático propio del género discursivo didáctico en matemáticas. Universo que ha de ser más o menos construido y comprendido por los sujetos que participan en esta esfera de comunicación conformada por el aula de matemáticas, de acuerdo con los roles que desempeñan los sujetos profesor y estudiante. Así, una premisa posible en este nivel del género discursivo, es que parte de lo que denominamos la competencia didáctica del profesor (Calderón, 2005) o de la idoneidad del profesor (Godino, 2008), tiene que ver con el dominio temático del docente. De igual manera, parte de lo esperado en el proceso de aprendizaje de los estudiantes es un acercamiento profundo y suficiente a las tematizaciones del área, de acuerdo con los grados de escolaridad y con los propósitos curriculares y didácticos.

iii) Realiza un tipo composicional bien diferenciado.

En cuanto a un tipo composicional, el género discursivo didáctico en matemáticas ha acuñado histórica y culturalmente formas prototípicas de enunciar los contenidos matemáticos. Véanse, por ejemplo, las formas enunciativas de los libros de texto de matemáticas, los tratados de matemáticas, las formas de enunciación de problemas matemáticos, las maneras de producir discurso oral y escrito por parte de los maestros de matemáticas, las formulaciones de tareas, de evaluaciones, etc. Veamos algunos casos que ilustren mejor los modos composicionales propios del discurso matemático escolar:

Texto/Discurso	**Tipo Composicional**	**Comentario**
El aprendizaje de las matemáticas constituye, evidentemente, un campo de estudio privilegiado para el análisis de actividades cognitivas fundamentales como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas e incluso la comprensión de textos (Duval, 1999, p. 13).	**Tratado teórico.** Postula una necesidad de análisis de factores del aprendizaje matemático. **Modo impersonal**, pero propositivo con autoridad teórica. Postulación de categorías para analizar dirigidas a interlocutores investigadores. **Enunciado asertivo** (afirma la existencia de un campo de estudio).	Las preguntas para un lector desprevenido son: ¿Qué tipo de texto es cada uno de estos? ¿Quién(es) los pudieron escribir? ¿Con qué interés o propósito?, ¿Cómo reconozco el tipo de texto y su propósito? ¿Qué me quiere comunicar? ¿Qué debo saber para comprender el texto?
Desde hace tres décadas la comunidad colombiana de educadores matemáticos viene investigando, reflexionando y debatiendo sobre la formación matemática de los niños, niñas y jóvenes y sobre la manera como ésta puede contribuir más eficazmente a las grandes metas y propósitos de la educación actual. En este sentido, la educación matemática debe responder a	**Texto tipo Guía curricular.** Ofrece lineamientos ministeriales: política educativa; el deber ser de la educación. **Modo impersonal,** pero es identificable el enunciador: alguien que dicta deberes. Enunciado apelativo y directivo (conmina a la comunidad y ordena acciones educativas). **Postulación de deberes,** de derroteros a un alguien colectivo: la comunidad educativa.	

Texto/Discurso	Tipo Composicional	Comentario
nuevas demandas globales y nacionales, como las relacionadas con una educación para todos, la atención a la diversidad y a la interculturalidad y a la formación de ciudadanos y ciudadanas con las competencias necesarias para el ejercicio de sus derechos y deberes democráticos (Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. MEN, 2006, p. 46)	**Enunciado directivo** (afirma un deber hacer en el campo de la educación).	
Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos (EBCL MCC. MEN, 2006, p. 86).	**Texto tipo formulación estándar** (objetivo, logro…). Es una formulación para el profesor, para planeación del área en 9.° grado. **Modo personal** (1ª persona). Postula los resultados que se han de obtener en un aspecto del aprendizaje (resolución de problemas tipo cálculo con números reales). **Enunciado tipo compromisorio**. Se emplea el estilo directo (de manera indirecta, pues está dirigido al profesor).	
Estudie el gráfico presentado y formule la relación matemática que se muestra con el gráfico (Calderón, 2005).	**Texto tipo tarea.** Es una formulación de una acción por realizar y un objetivo por cumplir. Es un texto multiregistro (registro escrito y registro figural).	

Texto/Discurso	Tipo Composicional	Comentario
	**Modo impersonal**, pero es identificable el enunciador: el profesor, el autor del texto o del problema. Postula las acciones por realizar y los resultados por obtener. **Enunciado directivo**: pide hacer algo y obtener algo.	
El lunes en la mañana Pedro recibió 879 pesos. Luego fue a un almacén a realizar importantes compras. En la noche contó su dinero y encontró que tenía 474 pesos menos que en la mañana. ¿Cuánto gastó en compras? (Adaptado de Duval, 1999, p. 272).	**Texto tipo problema matemático.** Presenta una situación, unos datos y una pregunta. **Modo impersonal,** pero es identificable el enunciador: el profesor, el autor del texto o del problema. Postula indirectamente las acciones por realizar (lectura de datos, resta) y los resultados por obtener, mediante la pregunta ¿Cuánto gastó en compras? **Enunciado directivo:** pide explícitamente responder la pregunta final e implícitamente emplear los datos y analizar la situación.	

En el anterior marco de ilustraciones de modos composicionales en la didáctica de las matemáticas, es posible identificar tipos de textos constitutivos de esta esfera de comunicación y, sobre todo, funciones textuales y discursivas que han de ser aprendidas por los sujetos que participan de esta esfera de comunicación de la didáctica de las matemáticas. Esto quiere decir que, entre otros aprendizajes, está el aprender a leer, a escuchar, a escribir y a decir textos y discursos prototípicos de esta esfera de comunicación. Se requiere un aprendizaje relacionado no solo con los temas matemáticos, sino con los modos de enunciar en matemáticas, de acuerdo con las situaciones y los contextos de uso; por ejemplo, reconocer un texto como una teoría, una definición, un teorema, un axioma, un problema, una instrucción, etc., de acuerdo con su modo composicional, resulta ser una aprendizaje necesario para los estudiantes y uno de los aspectos por enseñar, por parte de los profesores.

iv) Comporta un tipo estilístico.

En el género discursivo, el tipo estilístico se refiere a la entonación discursiva empleada en la producción de los enunciados. Este aspecto expresa los puntos de vista o los roles enunciativos (Martínez, 1997, 2003; Calderón, 2005) que aparecen en el contexto del aula, frente al saber matemático. Por ejemplo, el del estudiante que "sabe matemáticas", el que "no sabe", el que "no le gustan las matemáticas", el profesor "cuchilla" porque no se le entiende, etc. Este aspecto discursivo resulta de gran interés en el momento de considerar los modos de posicionamiento y de vínculo afectivo de los sujetos frente a un campo de saber, como es en este caso las matemáticas escolares. Veamos ejemplos:

Enunciado	**Posicionamientos**
Pues más que todo, más o menos lo que entendí fue que, o sea, para trabajar la mediatriz y todo eso lo trabajaban ellos con triángulos rectángulos, pero o sea, nosotros mismos cuando estábamos en esas clases los trabajábamos con triángulos isósceles (voz de un estudiante en clase, durante la resolución de un problema).	El posicionamiento básico es de duda: *"lo que entendí fue…"* El referente es el tema "mediatriz" y la estrategia "triángulos isósceles". Las modalizaciones evidencian duda con respecto al saber, aunque hay certeza de lo recordado. Rol de narrador de una experiencia: algo visto y recordado, y luego contado.
O sea, de pronto a mí me fue fácil identificar eso de una vez porque ya lo habíamos trabajado y lo trabajamos bastante, sí, entonces de pronto eso, o sea, eso me sirvió de mucho pero sí, o sea lo que está acá los… (voz de un estudiante en clase, durante la resolución de un problema).	Posicionamiento de certeza (incierta) la nominación es indefinida: "eso"; el referente es un algo a lo que se alude de forma deíctica. No aparecen nominaciones específicas. Rol de narrador de eventos generales realizados con anterioridad.
Más o menos igual, pero yo deducí. *No vi la necesidad de sacar la hipotenusa ni nada de eso, sino que vi que casi todas las figuras, más que todo, todos los triangulos son iguales y lo único de los cuadrados iguales son los grandecitos, no vi la diferencia,*	Posicionamiento de sujeto que realiza la acción y la reconstruye (*deducí*, vi, puse); da razón de su modo de actuación. Pone en escena un sujeto actuante en relación con los objetos (figuras, triángulos) y las representaciones matemáticas.

Enunciado	Posicionamientos
la igualdad, a esos 3 cuadrados que no le puse los nombres (voz de un estudiante en clase, durante la resolución de un problema).	Rol de narrador que se describe a sí mismo y a su proceso, respondiendo por él.
Ah bueno tú tienes que hacerle preguntas, ¿sí ves? porque ella te tiene que presentar a ti una relación matemática. Entonces si para ti entiendes que enumerar las figuras es una relación, entonces bueno, quiere decir que ella te convenció, que enumerar las figuras es una relación. Si no entiendes qué es lo que ella hizo, le tienes que preguntar (voz de un profesor durante una clase).	Posicionamiento de instructor (tienes que), el que orienta, el que sabe lo que hay que hacer en la interacción, con la experiencia y con los resultados. El objeto es la relación matemática y sobre ella instruye. Rol de profesor o de autoridad.
Los términos de área y perímetro no son reconocidos por la mayoría de los estudiantes. Se asocian con una medida sin tener claro con relación a cuál y sin hacer referencia a la cantidad (voz profesor investigador)	Posicionamiento de evaluador experto ante una situación (los estudiantes no saben los términos área y perímetro). Rol de profesor-investigador: evalúa una situación de aula.
La educación matemática, como objeto de preocupación y estudio, llega al año 2000 como un problema abierto con múltiples interrogantes, pero también enriquecido con los aportes, continuamente crecientes, de las comunidades académicas… la educación matemática tiene hoy una tarea muy compleja: debe recoger y transmitir el saber acumulado… la educación debe asegurar, en síntesis, la formación de ciudadanos competentes para el trabajo y para la vida social (voz de investigador editor de libros).	Posicionamiento de autoridad epistémica y discursiva: sabe y enuncia los fines y los retos de la educación matemática como campo de saber. Rol de experto en la comunidad, de pedagogo, de investigador.

Como se observa, los roles enunciativos no son exclusivos de una esfera en particular, pero sí modalizan las tematizaciones y los roles discursivos, contribuyendo a la dinámica de cambio del género discursivo y en particular a la configuración de las identidades discursivas en la esfera dada.

De este último aspecto, en particular, emerge lo que se puede denominar las creencias y valoraciones sobre las matemáticas en la escuela, que van configurando, en gran medida, la cultura de las matemáticas escolares. Por ejemplo, la creencia de que las matemáticas son difíciles, que son para genios, que es preferible estudiar carreras que no tengan matemáticas, etc. Sin embargo, será importante analizar de qué manera este resultado enunciativo ha sido consolidado gracias a las formas de enunciación prototípicas de las tematizaciones de las matemáticas escolares. El llamado es, entonces, a realizar una mirada crítica a los enunciados de los textos matemáticos y a la configuración de los sujetos discursivos que tales enunciados encarnan. Asimismo, a no olvidar que cada texto matemático es, ante todo, un enunciado; es decir, que ha sido propuesto por alguien que no sólo nos dice algo, sino que también nos proporciona una opinión, una orientación en el discurso, un marco de relaciones con otros discursos, una proyección de una respuesta y una orientación sobre cómo se "habla" en ese contexto matemático. Pensar que todo esto está presente en el enunciado matemático…

De la presentación anterior, colegimos que el marco de prácticas discursivas propias de una esfera dada, como en este caso el aula de matemáticas, pone a los interlocutores –profesores y estudiantes– en una experiencia discursiva rica y variada en formas de decir (orales y escritas para enunciar relaciones, problemas, axiomas, teoremas, etc.), maneras de proceder (por ejemplo, estrategias de resolución de problemas en matemáticas), tipos de temas (por campos como el geométrico y el aritmético, entre otros). Tal variedad de experiencias discursivas constituyen el campo de formación del sujeto escolar en matemáticas y, a la vez, proporciona los elementos para que ese sujeto configure roles discursivos (el profesor, el matemático, el científico, etc.) y enunciativos (el crítico de teorías, el simpatizante de un autor, el detractor de las matemáticas, etc.), y contribuya al flujo evolutivo del género discursivo didáctico de las matemáticas o al de las matemáticas.

Lenguaje y conocimiento matemático escolar

La pregunta por el conocimiento matemático puede tener respuestas de tipo ontológico y de tipo epistemológico. A nuestro juicio, ambas son importantes para la reflexión educativa; de ahí que, de acuerdo con nuestro trabajo de investigación, se haya considerado que una perspectiva didáctica tendrá que dar razón de los dos tipos de perspectivas, y que además, el papel del lenguaje, en este caso, vuelve a ser central.

Así pues, en una perspectiva didáctica, la pregunta que orienta la reflexión sobre la relación lenguaje y conocimiento matemático será la que indaga por el problema del desarrollo de competencias comunicativas y cognitivas de los estudiantes en matemáticas. Tal pregunta sitúa a profesores e investigadores educativos en la exigencia de considerar, al menos, tres aspectos:

- La naturaleza de los saberes matemáticos. Por ejemplo, pensar en cada campo de las matemáticas escolares como la geometría, la aritmética, la estadística, etc., y sus particularidades epistemológicas, teóricas, metodológicas.
- Los procesos cognitivos asociados a los dos aspectos anteriores.
- El lenguaje propio de las matemáticas y el de sus campos particulares: las formas discursivas y textuales en geometría, en aritmética, en estadística; las maneras de comunicar en estos campos y por distintos contextos (el tratado matemático, la investigación matemática, el texto escolar, el currículo, etc.).

De los dos primeros aspectos no nos ocuparemos en este trabajo, dado que es especialidad de matemáticos y educadores matemáticos y que la presente reflexión se realiza, como se dijo anteriormente, desde el lenguaje. Para el tercer aspecto partiremos, considerando con Pimm (1990), que el lenguaje matemático es un desarrollo del lenguaje natural y como tal exige el desarrollo de procesos cognitivos asociados y de registros semióticos (Duval, 2001) que representen y expresen los saberes construidos en la experiencia matemática. Además, que tales representaciones se dan en y a través del lenguaje (la lengua y otros registros de representación y de comunicación).

De lo anterior, se infiere que en esta relación se asume una perspectiva sistémica del lenguaje y de los lenguajes, y su relación con los contenidos (por ejemplo matemáticos) que ellos vehiculan. Al respecto, dos aspectos son relevantes: i) la comprensión de los sistemas verbales como las lenguas naturales y ii) la relación de las lenguas con otros sistemas de representación y de comunicación. Adicionalmente, que el uso de la lengua natural y de otros sistemas de representación propician un desarrollo de las condiciones intelectuales y sociales de los sujetos. Por esta razón, en primer lugar me referiré al papel de la lengua oral y escrita en el desarrollo de competencias cognitivas y comunicativas de los sujetos.

Dado que la lengua natural también es un sistema semiótico –y quizás el sistema semiótico por excelencia–, su uso orienta a los usuarios en la forma de representar y de producir representaciones con ella. La gramática de la lengua impone ciertas exigencias que los hablantes construyen a medida que usan una lengua. Es decir, se aprende la forma de enunciar (según las situaciones de enunciación), el léxico apropiado por contextos de comunicación, las variaciones fonéticas (por ejemplo, por estados emocionales), las diferencias fonológicas (por homonimia, por homofonía, entre otros), las variaciones dialectales (por regiones, por estratos, por oficios, etc.), los distintos usos ortográficos, y demás, todo esto de acuerdo con la experiencia de uso de la lengua por parte de los sujetos. A las variaciones situacionales de la lengua, Halliday (1982) las denomina registros.

El uso de una lengua, entonces, implica la existencia de funciones discursivas de dicha lengua y de operaciones relacionadas con tales funciones. En general, pueden considerarse dos tipos de funciones para las lenguas: unas orientadas a la representación y otras a la comunicación. En las primeras, siguiendo a Duval (1999), podemos identificar aquellas que funcionan cuando estamos produciendo discurso: la referencial, que permite la instauración del objeto del que hablamos mediante la *designación* (empleando deícticos, señalando o nombrando objetos: círculo, triángulo, etc.), la *categorización* (usando nombres para los objetos: el número, el cuadrado), la *determinación* (empleando pronombres, artículos, adjetivos, nombres, etc.: este, aquel, el cuadrado mayor) y la descripción de los objetos (realizando frases completas: la primera serie, el cuadrado de la derecha); la función apofántica, que produce enunciados completos con atribuciones y valores sociales, esto es, la producción de predicados sobre los objetos y de puntos de vista sobre ellos y sus relaciones. La tercera función será la de expansión discursiva, que establece la continuidad temática de acuerdo con la trama propuesta por el sujeto, por ejemplo negando, acumulando características o relaciones, estableciendo sustituciones, etc., en fin, creando texto. En esta perspectiva, en la producción de discurso y de texto, se manifiestan funciones de la lengua y operaciones cognitivas asociadas que van a permitir tal producción de sentidos y de significados con respecto a un objeto o a un tema. O también, que permiten instaurar discursivamente los objetos de los que hablamos.

En cuanto al segundo tipo de funciones de una lengua, es decir las relacionadas con la comunicación, parece útil considerar las siete funciones propuestas por Halliday (1982), dado que se trata de comprender cómo funciona el lenguaje para posibilitar el posicionamiento del sujeto hablante frente a su interlocutor (individual o colectivo). Este autor reconoce funciones como la instrumental (para satisfacer necesidades), la reguladora (para regular el comportamiento de los demás: "haz lo que yo quiero"), la interactiva (para involucrar a otras personas), la personal (para identificar y manifestar el yo), la heurística (para explorar el mundo exterior e interior), la imaginativa (para crear un mundo propio, para fingir) y la informativa (para comunicar nuevas cosas). Así pues, desde este punto de vista, en las producciones discursivas es posible identificar la presencia del sujeto, es decir la dimensión enunciativa, con sus particulares orientaciones y posiciones con respecto a los interlocutores y a los objetos o los temas que refieren.[7]

Oralidad y matemáticas escolares

De lo anterior vale la pena destacar como útil, didácticamente hablando, que el uso del lenguaje no solo hace exigencias cognitivas e interactivas a los sujetos, sino que también ofrece pistas a los maestros para considerar lo que las expresiones discursivas dejan ver sobre las elaboraciones de conocimiento de tales sujetos. De acuerdo con Nussbaum y Tusón (1996).

> *aprender significa apropiarse paulatinamente de las formas de hablar y escribir (también de saber hacer y de saber decir lo que se hace) sobre el objeto de aprendizaje en cuestión, y hacerlo en la manera acostumbrada en esa parcela del saber; significa, por tanto, apropiarse del discurso específico que se reconoce como propio de esa disciplina;*

en nuestro caso, de las matemáticas escolares.

Cazden (1988), citada por Nussbaum y Tusón (1996), plantea el carácter novedoso de las formas de participación oral y de las exigencias del discurso en el aula para los niños, especialmente en los niveles iniciales. El discurso oral en el aula requiere del desarrollo de aprendizajes alrededor de aspectos como la manera de hablar en ella, es decir, las normas de interacción que regulan los diferentes eventos comunicativos que se producen en ese ámbito social; el tipo de estructuras de participación (Erikson y Mohatt, 1982) que se crean en el aula y en qué sentido son semejantes o diferentes a las que se dan fuera de ella; los temas (los contenidos y sus formas discursivas y textuales).

En general, la oralidad en el aula se orienta a la regulación y a la gestión de las actividades; de igual manera, permite la manifestación de aspectos de tipo afectivo, de estados de ánimo y de intencionalidades. A través de estos usos se ponen también de manifiesto las diversas "culturas" o "subculturas" presentes en ese contexto. Como plantea Vion (1992), además de servir para la transmisión de la información, la elaboración del discurso supone la construcción de:

- formas de participación propias de las relaciones didácticas: preguntar, pedir la palabra, pedir aclaraciones, responder preguntas, etc.;

7 Obsérvese al respecto, la complementariedad de este análisis con la perspectiva discursiva, en especial el análisis de los posicionamientos enunciativos de los sujetos en el discurso. Sin embargo, en este momento se trata de enfocar el análisis en la lengua como sistema y el uso que se hace de ella y de otros lenguajes.

- del sentido local: conciencia de la orientación enunciativa que el profesor y el estudiante ponen en juego en las interacciones; por ejemplo reconocer si el profesor pregunta para llamar la atención por estar distraído, para sancionar, para verificar comprensión;
- del sentido contextualizado: la identificación de los contextos de uso de los términos matemáticos empleados o de la función de las actividades (tareas, problemas, evaluaciones, etc.);
- de las relaciones sociales: identificar las jerarquías, las distancias y cercanías entre ellas, las funciones comunicativas y las formas del discurso para la interacción social;
- y de las identidades individuales: reconocimiento y auto-reconocimiento de la identidad familiar, social, regional, etc., mediante el reconocimiento de dialectos, sociolectos, costumbres, marcas culturales, etc.

Así, tener en cuenta esta multifuncionalidad del discurso oral y sus diversas posibilidades, supone dos cosas: i) en primer lugar, considerar su carácter de género discursivo propio del aula, al que el estudiante ha de acceder, como se explicitó en el apartado anterior; y ii) sobre todo, en la dimensión sistémica de la oralidad, reconocer la necesidad de que este modo de expresión discursiva sea objeto de enseñanza (Núñez, 2008) o, por lo menos, de reflexión entre profesores y estudiantes, y constituya un *corpus* de análisis para el profesor, dada la información que revela sobre los procesos de aprendizaje de los estudiantes y sus relaciones con el saber (matemático) y con la comunicación de este.

En el contexto del aula de matemáticas, es evidente que las condiciones de participación oral (pedir la palabra, responder preguntas, conversar de manera aceptable sobre los temas trabajados) exige el desarrollo de una oralidad situada en un tipo de prácticas relacionadas con el género didáctico en matemáticas. Por ejemplo, asumiendo los modos discursivos prototípicos en los enunciados matemáticos, un aprendizaje fundamental para los estudiantes es la familiarización con la función y la estructura de los enunciados de problemas en matemáticas: *me piden razonar y me piden solucionar un problema*. Desde este punto de vista, el estudiante puede esperar, en el enunciado que le dirige su profesor, una solicitud de "hacer algo" con un conjunto de datos, de reglas que ha de comprender y aceptar (que pueden estar explícitas o no) y de orientaciones de procedimiento. Frecuentemente se pide establecer relaciones.

> *P. ¿Qué tienes que hacer si te dan $30.000 y necesitas comprar tres resmas de papel y 20 carpetas para documentos? Cada resma cuesta $7.000 y cada carpeta $500. ¿Te alcanza el dinero?*

Las prácticas orales en matemáticas requieren, como en otras áreas, de la manifestación y de la evolución y combinación de distintas modalidades discursivas como la narración, la descripción, la explicación, la argumentación, orientadas a las tematizaciones de los contenidos y de los procesos matemáticos y a la construcción de una cultura matemática. En este contexto, el trabajo en grupos y las plenarias ofrecerán un espacio importante para el desarrollo de una oralidad sobre lo matemático y de una relación afectiva de tipo positivo con este campo de saber. Se requiere, entonces, equilibrar el nivel de frecuencia de la voz del profesor con relación a la del estudiante; esto, sin perder de vista que ha de ser una voz circunscrita al avance de las tematizaciones y de los modos composicionales de las matemáticas; es decir, que revele con mayor vigor la experiencia matemática que va logrando el estudiante.

Escritura como práctica necesaria en las matemáticas escolares

Dado el papel central que ocupa la escritura en el aula, en este momento resulta fundamental considerar el papel de la escritura académica como un tipo de práctica discursiva escolar que incide de manera definitiva en los modos de elaborar conocimiento en el aula.

Como punto de partida de esta reflexión, se considera que escribir no es lo mismo que hablar. Aunque existen modos de hablar que parecen escrituras y escrituras que parecen oralidad, el acto de escribir implica una reconstrucción del conocimiento que se tiene y una reflexión sobre el lenguaje que se usa; según Bruner (1982) y Jurado (1998), la escritura exige una recontextualización de la conciencia. En este sentido, la escritura tiene un carácter teleológico, es decir, exige un tratamiento especial del código escrito (gramatical y semántico) y una adecuación del tema (según intención y contexto de comunicación).

Con base en lo anterior, podemos concluir que la escritura es un modo de comunicación discursiva y es una expresión del pensamiento y del conocimiento; de ahí que ella, junto con la lectura, exijan dos procesos básicos: la comprensión y la producción de textos. En esa perspectiva, es posible identificar criterios de valoración para la escritura, por ejemplo, la de tipo académico:

a. El criterio *pragmático,* que permite establecer la función que cumple y el tipo de texto que produce: por ejemplo, un texto puede tener la función de comunicar una solicitud del profesor y por ello dar instrucciones sobre cómo proceder (es lo que comúnmente denominamos tarea) y por esta razón, podrá ser un texto tipo taller, tipo preguntario, etc. De igual manera, la respuesta escrita del estudiante puede tener la función de "ser respuesta" o de expresar soluciones y, por lo tanto, tomar la forma de formulario, cuestionario, etc.

b. El criterio *epistémico*, que da razón del modo de abordar el conocimiento que emplea el escritor. Este factor es interesante desde el punto de vista didáctico, por cuanto orienta al lector en la ruta epistémica seguida por el escritor: qué aspectos topicaliza (o toma como hilo conductor), qué aspectos tematiza (o desarrolla del tópico), qué puntos de vista o qué posiciones expresa con respecto al contenido (está de acuerdo, en desacuerdo…), a qué recursos de autoridad (autores, teorías…) recurre, etc.

Así pues, en general, como modo de comunicación discursiva, la escritura exige el reconocer los espacios sociales del uso del lenguaje y de los textos: por ejemplo, el *género discursivo* que encarna un escrito (pedagógico, científico, matemático, etc.); establecer los *contratos de habla* (y de escritura) tales como conversar, vender, evaluar, enseñar, entre otros; identificar las múltiples *voces sociales*, como las de autoridad científica, política, filosófica, pedagógica, de contradictores, de aliados, etc.; por último, diferenciar modos textuales como el narrativo, el expositivo, el descriptivo, etc.

Como **modo de expresión** del pensamiento y del conocimiento, la escritura exige desarrollar *estrategias cognitivas de lectura* (procesos e inferencias) y estrategias *metacognitivas*, para regular la producción escrita para reflexionar tanto sobre el uso del lenguaje como sobre el conocimiento que se va poniendo en juego. Es decir, leer de manera intencional y autónoma requiere, como mínimo, el desarrollo de dos tipos de estrategias: *i) de escritura*, tanto para la producción de texto como para la producción de sentido (construye el lector, la intención, la función del texto, el objeto referido y sus contenidos y la estructura textual); *ii) de tratamiento del conocimiento* (por campos, áreas o prácticas) para objetivar referentes, relacionar contenidos conceptuales, procesuales, procedimentales, entre otros.

En consecuencia, resulta necesario identificar los distintos modos de producción de escritura académica y sus implicaciones discursivas y textuales, con el fin de generar criterios más claros para el desarrollo de las prácticas de lectura y de escritura en el aula. Veamos algunas implicaciones:

- La **producción y la recontextualización del conocimiento** científico, artístico y tecnológico en los distintos campos del conocimiento humano. Es decir, que no basta con elaborar un saber acerca de un campo temático, como por ejemplo sobre la relación pitagórica (RP); la escritura exigirá analizar lo que se sabe al respecto de RP para tematizar y organizar aspectos de los que puede y quiere dar cuenta el escritor.
- El desarrollo por intencionalidades académicas y la generación de tipos textuales como las monografías, las tesis, los artículos, las reseñas,

los informes, los tratados, los manuales, los textos, los talleres, etc.

- La legitimación de los constructos teóricos y metodológicos en un campo de conocimiento y las formas de producción discursiva en tal campo. Desde este punto de vista, con respecto al conocimiento matemático (y a cualquier otro tipo de conocimiento), es necesario reconocer que la práctica escritural también implica el desarrollo de un saber sobre los modos en que se legitima el conocimiento en este campo; por ejemplo, los procedimientos de resolución de problemas, de demostración, de axiomatización, etc.

Lenguaje matemático como desarrollo del lenguaje natural

Finalmente, en la perspectiva de la idea de que el lenguaje matemático es un desarrollo del lenguaje natural y recuperando lo expuesto anteriormente, es importante considerar tres aspectos identificados por Calderón (2005) para sostener esta hipótesis: i) la metáfora del lenguaje matemático y su desarrollo en el aula; ii) el carácter especializado del lenguaje matemático y iii) el papel del lenguaje matemático en la forma de construcción y legitimación de conocimiento. A continuación presentamos brevemente elementos para estos tres aspectos, que en general revelan nuestra preocupación por un anclaje de esta discusión en el problema del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas y del desarrollo del lenguaje; problemas que, a su vez, se relacionan con las maneras de comunicar en las clases de matemáticas y de significar el conocimiento matemático en la escuela.

Por ejemplo, en el interés por la comunicación matemática, Klemme (1981, en Primm, 1990) realizó un estudio interesante sobre los actos de habla en matemáticas, como una aplicación de técnicas de análisis de la lingüística teórica. Este estudio destaca el problema de estudiantes holandeses para la comprensión de significación de expresiones matemáticas. También se han realizado estudios, que desde el lenguaje, analizan el problema de la escritura en matemáticas. Desde este punto de vista, la metáfora del lenguaje matemático, según Pimm (1990), está en considerar que, además, las matemáticas son un lenguaje desarrollado del lenguaje natural. De ahí que las expresiones matemáticas comporten características del lenguaje natural como sus dos grandes funciones: la comunicación y la significación (restringida al campo disciplinar de las matemáticas); el permitir la producción de discurso matemático (oral y escrito) y, por ello producir estructuras discursivas y textuales que se sostienen y se realizan en los niveles sintáctico, semántico y pragmático propios del lenguaje natural, pero que aluden a situaciones matemáticas; además, comporta el carácter de registro como registro matemático, en términos de variación dialectal (tecnolectal, en este caso) (Halliday, 1982)[8].

La metáfora del lenguaje matemático pone en evidencia la necesidad de considerar dos factores: las matemáticas implican un *desarrollo de competencia en sus dominios* (semántico, sintáctico y pragmático) y *configuran esferas sociales de comunicación discursiva* que se realizan mediante múltiples situaciones de comunicación de lo matemático. Con respecto al primer factor, se reconoce que en el campo de las matemáticas requiere de modos de construcción y de comunicación de significado matemático y, a la vez, genera campos semánticos y léxicos relacionados con sus áreas particulares (geometría, aritmética, estadística, etc.); tales modos se realizan tanto a través de la oralidad como de la escritura y la conversión, a otros registros de representación distintos al de la lengua natural (Duval, 1999), como el del álgebra, el aritmético, etc.; por ejemplo, según Tolchinsky (1993, p. 240):

> *la significación de una cifra depende de la relación de posición que guarda con otras cifras en el espacio gráfico; por lo tanto la correspondencia entre aquello que se dice, lo que se escribe y lo que significa es muy diferente de la que existe entre una palabra y su significado.*

Estos procesos exigen el desarrollo de formas y estrategias particulares del lenguaje, como las formas de enunciación (de problemas, de axiomas, de nociones, de teoremas, etc.), de designación y de notación (lexical, simbólica), categorización (simple y compleja) y derivación (de acuerdo con reglas como la sucesión, el orden, etc.) para la construcción de referentes (objetos matemáticos como el número, la línea, etc.) y de relaciones entre ellos (predicativa y simbólicamente hablando). Además, exige el desarrollo de una competencia oral y escrita que garantice la posibilidad de comunicar, de predicar, de refutar, etc. y de producir textos adecuados a cada situación matemática. Desde este punto de vista, se reconoce la necesidad de desarrollar en los sujetos una gramática propia de los discursos y los textos matemáticos que involucre reglas de la sintaxis, de la semántica y de la interacción social; con ello, una competencia para la lectura, la escritura y la oralización de textos y discursos matemáticos que hace competente al sujeto para los distintos desempeños matemáticos que las actividades y las situaciones socio-matemáticas le exigen: calcular, estimar, medir, etc. (León, 2005).

8 En este caso se asume la idea de registro como variedad de lengua y no en el sentido semiótico de Raymond Duval (1999), quien lo toma como registro de representación semiótica para permitir diversas representaciones de un mismo objeto.

Con respecto a la configuración de esferas de comunicación social, escenarios como las clases de matemáticas o los debates científicos en matemáticas constituyen espacios culturales de comunicación y de producción de significados particulares en el campo matemático o de la educación matemática. Se requiere, entonces, analizar las formas de producción discursiva (oral y escrita) de profesores y estudiantes y su incidencia en el aprendizaje; comprender que la comunicación matemática realiza *roles discursivos* como el del matemático, el del profesor, el del estudiante; a la vez genera *roles y rituales enunciativos* propios de este contexto de enunciación, como por ejemplo el rol de "el genio", "el hábil", el que "no entiende" o "el negado", y rituales como procedimientos legítimos y no tan legítimos para resolver problemas (por ejemplo, proceder por fórmulas, versus contar con los dedos; tipos de pruebas, etc.), procedimientos instruccionales de la clase de matemáticas (como resolver problemas para comprobar o para reforzar, las "preguntas para rellenar", y la acuñación de términos propios del campo: multiplicando, multiplicador, sumando, sustraendo, etc.). Todo lo anterior evidencia que gracias al carácter de lenguaje de las matemáticas se construyen situaciones comunicativas particulares dentro del gran género discursivo pedagógico y en el subgénero didáctico (Calderón, 2005).

En relación con el carácter especializado del lenguaje matemático y derivado del punto anterior, en particular de la noción de registro, es posible explicar el lenguaje matemático como especializado (Lo Cascio, 1991). En el ámbito de los estudios del lenguaje se distingue entre lenguaje común y lenguaje especializado o sectorial, especialmente cuando se refiere a sectores profesionales, técnicos o científicos. Así, el lenguaje matemático se reconoce como un lenguaje especializado que, como todos los sistemas formalizados, constituyen una lengua "artificial"[9] sometida a numerosas restricciones para la eliminación de toda ambigüedad: se trata de una excepción en las lenguas naturales más que de un modelo que debe seguirse en todas las circunstancias; por esta razón tiene la característica de la univocidad semántica o exige la interpretación unívoca. Como otra característica del lenguaje matemático está:

> *su relación, por antonomasia, con el razonamiento, al análisis de datos, a la aplicación de reglas y a la formulación de conclusiones inevitables, las cuales, a su vez, devienen reglas aplicables a nuevos datos que permitan la formulación de nuevas conclusiones y en consecuencia de nuevas reglas (Lo Cascio, 1991, p. 310).*

En matemáticas son habituales las reglas generales universales que, según el mismo Lo Cascio, son aplicables *universalmente* solo si se verifican las

9 Artificial en cuanto a ser un lenguaje de segundo orden, que surge de un proceso de especialización y que no responde a todas las funciones de la comunicación en contextos cotidianos.

condiciones que exigen, dado que los objetos, los datos y las relaciones están ligados entre sí por el razonamiento lógico y dominados por las leyes de la realidad objetiva y observable (piénsese en la ley de la transitividad).

Estas cualidades de las matemáticas y de su lenguaje son las que hacen de ella una disciplina escolar que contribuye no sólo al desarrollo de habilidades matemáticas como contar, medir, estimar, sino también al razonamiento y sus procesos inferenciales como las deducciones, las inducciones y las abducciones. Asimismo, las formas de elaboración y de producción de conocimiento matemático privilegian los siguientes elementos: *el manejo de datos, la resolución de problemas y la realización de demostraciones*. Esto significa que las situaciones matemáticas exigen el desarrollo de cierto tipo de destrezas en procesos cognitivos y lingüístico-discursivos tales como aprender a referir y tratar datos (designar, categorizar, generalizar, cualificar), y a comprender y estructurar enunciados problema o enunciados demostración. Veamos el ejemplo propuesto por Lo Cascio (1991, p. 311) para evidenciar cómo se procede en matemáticas, generalmente, de manera deductiva:

1. *se presentan los datos o fenómenos,*
2. *enuncia las leyes sabidas y lógicamente aceptadas, y*
3. *una vez se ha establecido que se admiten relaciones entre datos y reglas,*
4. *se llega a la conclusión, que se deduce "necesariamente".*

Este tipo de procedimiento ha de ser desarrollado, así como la comprensión de textos tipo problema, que generalmente divide la estructura en: i) la *formulación* del problema (definición, datos, cuestionamientos) y ii) la *solución* del problema (análisis de datos, formulación de reglas generales aplicables a los datos y extracción de conclusiones). De esta manera, es posible decir que el carácter argumentativo de la actividad matemática se manifiesta en la solución del problema, carácter que, en casos bastante desarrollados, puede alcanzar el nivel de demostración. Como se observa, entonces, el lenguaje matemático como lenguaje especializado genera reglas de producción (sintáctica y semántica) y reglas de comunicación y de difusión de su conocimiento, que tendrán que ser desarrolladas por los estudiantes.

Por último, con respecto al papel del lenguaje matemático en la forma de construcción y legitimación de conocimiento, aspecto enunciado arriba, vale la pena recordar el papel que históricamente han jugado los métodos matemáticos como modos legítimos y confiables de someter los discursos, las opiniones y los constructos teóricos, en general, a la evidencia. Este hecho pone a las matemáticas y sus métodos en relación directa con los modos de producir conocimiento científico. Sin entrar en este momento en el análisis del desarrollo de una epistemología del conocimiento, sí podemos señalar que los procedimientos matemáticos han proporcionado elementos para considerar las formas de razonar, producir y validar conocimiento. El paso de modos racionalistas a ultranza (por ejemplo, los que sostuvieron el paradigma positivista en las ciencias) o de los axiomas de las ciencias matemáticas considerados como evidencias, a una perspectiva más convencional, discursiva y provisional de los lenguajes y de los resultados científicos, es el que según Perelman (1977, pp. 206-207) "*permite el paso de la evidencia a la hipótesis. De la lógica formal a la lógica natural, a lo que atañe al humano.*"

Esta última idea, fundamental para la filosofía del conocimiento, justifica una discusión metodológica; discusión que retoma la creencia en la existencia de las verdades eternas, contenidas en el espíritu divino y garantizadas por él (Platón, Descartes, Bacon) a la emergencia del ser humano falible, hipotético, que supera los datos de la experiencia; que considera que ésta no es ni evidente ni infalible. Es decir, estamos ante una concepción más popperiana del conocimiento (Gómez, 2000), que debe estar respaldada en buenas razones, reconocidas como tales por otros hombres, miembros de la misma comunidad científica.

> *Cambia el estatus del conocimiento de impersonal a humano y sujeto a controversia. No obstante, toda idea nueva tendrá que ser sostenida con instrumentos que tiene en que ver con el método propio de la disciplina y apreciados en función de ésta* (Perelman, 1977; 1997, p. 208).

A este último criterio expuesto por Perelman es que ha contribuido el modelo de construcción de conocimiento matemático en los demás campos de la ciencia. Vale la pena advertir al respecto, que el rigor de los procesos matemáticos no exime formas de elaboración de conocimiento mediadas por procesos discursivos como las narraciones, las descripciones y, en particular, la argumentación; también que, de manera especial, en la escuela el conocimiento matemático requiere ser tratado no solo como conocimiento disciplinar, sino como conocimiento sociocultural que genera prácticas socio matemáticas valiosas para su desarrollo.

A modo de conclusión

Tan solo se dirá en este momento que la reflexión sobre la relación lenguaje, conocimiento matemático y escuela resulta ser obligada para profesores de matemáticas y de lenguaje, y exige una mirada interdisciplinar y en algunos casos transdisciplinar. Pensar el para qué de la educación, de la educación matemática y del lenguaje y la educación, implica poner en relación múltiples factores de orden teórico y metodológico que provienen de los tres campos. Sin embargo, es un hecho que el gran articulador de estas relaciones es la didáctica. Un análisis de tipo didáctico de esta relación, permite no solo identificar el corazón del problema, como por ejemplo el aprendizaje o la enseñanza de las matemáticas, sino también, desde esta identificación, establecer las relaciones entre los tres campos y, quizás, la comprensión de los micro problemas relacionados con el problema mayor.

Por ejemplo, si identificamos las competencias comunicativas y cognitivas en matemáticas como un aspecto concreto del problema del aprendizaje de las matemáticas, nos resulta más clara la articulación de relaciones entre lo que viene de la educación, lo que se exige de los campos matemáticos y el papel que juega el lenguaje en toda esta relación.

La invitación explícita es, entonces, a la conformación de espacios de diálogo de maestros de distintas áreas, con el fin de que en él se alcance una identificación de relaciones, de problemas, de potencialidades explicativas de cada campo y de implicaciones didácticas en general (usos teóricos, metodologías, entre otros).

Referencias bibliográficas

Bajtín, M. (1982). *Estética de la creación verbal.* México: Siglo XXI.

Calderón, D. (2005). *Dimensión cognitiva y comunicativa de la argumentación en matemáticas*. Tesis Doctoral. Cali: Universidad del Valle.

____________________ (2003). Género Discursivo, discursividad y argumentación. En: *Revista Enunciación No. 8,* 44-56. Agosto. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

____________________ (2001). Sobre textos académicos. En: *Revista Enunciación No. 6,* 35-43. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

____________________ (2005). Sobre la competencia pedagógica en el maestro de lengua materna. En: *Revista Enunciación No. 10,* 113-118. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Calderón, D. y León, O. (2001). *Requerimientos didácticos y competencias argumentativas en matemáticas*. Bogotá: IDEP – Colciencias.

Charaudeau, P. (1998). *Grammaire du sens et de l´expression*. París: Hachette.

Ducrot, O. (1988). *Polifonía y argumentación*. Conferencias del seminario *Teoría de la argumentación y análisis del discurso*. Cali: Universidad del Valle.

D´Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Traducción de Ángel Balderas. Bogotá: Magisterio.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Traducción de Miryam Vega. Cali: Universidad del Valle.

Giménez, J. (2002). *La investigación sobre el conocimiento profesional del profesor.* Huelva: Estepa Universidad de Huelva.

Jorba, J.; Gómez, I. y Prat, A. (Ed.). (2000). *Hablar y escribir para aprender*. Madrid: Editorial Síntesis.

Halliday, M. A. K. (1982). *El lenguaje como semiótica social*. México: Fondo de Cultura Económica.

Llinares Ciscar, S. (1998). El conocimiento profesional del profesor. En: *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas* No. 17, 51-64.

Lo Cascio, V. (1998). *Gramática de la argumentación*. Madrid: Alianza Universidad.

Martínez, M. C. (1997). *Análisis del discurso.* Cali: Universidad del Valle.

__________________ (1985). La orientación del significado y la clase social: la referencia. En: *Revista Lenguaje* No. 15. Cali: Universidad del Valle.

MEN (2006). *Estándares básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Documento No. 3. Bogotá: MEN.

Núñez, Ma. P. (2008). Aspectos básicos de la didáctica de la lengua oral. En: Jiménez Jiménez, Ma. A. et al. (Eds.). *Nociones didácticas sobre oralidad y escritura, pp. 37-56. Grupo de investigación Hacia una sociedad del conocimiento y la información en la ciudad autónoma de Melilla*. Granada: Grupo Editorial Universitario.

Nussbaum, L. y Tusón, A. (1996). El aula como espacio cultural y discursivo. En: *Signos. Teoría y práctica de la educación* No. 17, 14-21. Enero–marzo .

Pera, M. (1994). *The discourses of science.* Chicago: University of Chicago Press.

Perelman, Ch. y Olbrechts-Tyteca, L. (1989). *Tratado de la Argumentación*. Madrid: Gredos.

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Ediciones Morata.

Ponzio, A. (1998). *La revolución bajtiniana: el pensamiento de Bajtín y la ideología contemporánea*. Madrid: Ediciones Cátedra.

Tamir, P. (2005). Conocimiento profesional y personal de los profesores y de los formadores de profesores. En: *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado,* 9, 2. Jerusalén: Universidad Hebrea de Jerusalén.

Vigotsky, L. S. (1988). *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires: La Pléyade.

PARTE II

Experiencia interna y quehacer matemático

Carlos Eduardo Vasco Uribe[1]

Introducción

El propósito de este trabajo es doble: considerar al menos tres tipos de experiencia interna relacionados con las reconstrucciones mentales espacio-temporales: geométrica, aritmética y lógica, y argumentar por qué parecen ser estos los mínimos necesarios (y tal vez suficientes) para iniciar y apoyar el avance del trabajo matemático de niños, niñas y jóvenes, al menos en las ramas de las matemáticas que se han llamado "aritmética", "geometría" y "lógica matemática".

Como preámbulo, diré qué considero *experiencia* y qué entiendo por *quehacer matemático*. Afirmo, en primer lugar, que no puede darse una definición precisa de experiencia por ser imposible aclararle el sentido del vocablo experiencia a quien no la haya tenido, e innecesario hacerlo a quien sí la haya experimentado repetida y conscientemente. En segundo lugar, aunque sea imposible definir el sustantivo *experiencia* o el verbo *experimentar,* sí podemos describir la experiencia como una *vivencia* interior, personal e intransferible, de una situación, fenómeno o proceso cualquiera de nuestro transcurrir espacio-temporal. Por supuesto que a quien me pregunte de nuevo qué es *vivencia* tendría que decirle que es una experiencia interna.

Para salir de este círculo, podríamos hablar del verbo *experimentar* como más apropiado para referirnos al proceso de *vivir* –o mejor, de *vivenciar*– las experiencias o vivencias personales a las que me refiero, y decir que estas son recortes mentales conscientes de ese proceso continuado que se experimenta, vive o vivencia. Es verdad que, en español, el nombre sustantivo derivado del verbo *experimentar –experimento–* parece más apropiado para procesos diseñados con el fin de confirmar o refutar conjeturas o hipótesis previamente formuladas; pero eso nos aclara que no nos estamos refiriendo a experimentos científicos, sino a la categoría más general de experiencia.

1 Licenciado en filosofía, magíster en física y doctor en matemáticas; es profesor emérito de la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá. Actualmente es profesor especial en el programa de Doctorado Interinstitucional en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, la Universidad Pedagógica Nacional en Bogotá y la Universidad del Valle en Cali, Colombia. En este doctorado dirige la línea de didáctica de las matemáticas. Es profesor del programa de Doctorado en Ciencias Sociales, Niñez y Juventud de la Universidad de Manizales y Cinde, en Manizales, Colombia, en donde colabora con la línea de desarrollo cognitivo-emotivo-motor de niños, niñas y jóvenes.

En los adjetivos afines se notan también ciertas derivas lingüísticas: *experiencial* sería el adjetivo más cercano a la idea de experiencia que tengo en mente (comparar con *vivencial*), mientras que *experimentada* parece referirse más a la persona que tiene ya muchas experiencias en su pasado, aunque también se aplica al fenómeno que ha pasado por el proceso interior al que me refiero (comparar con *fenómeno vivenciado*) y *experimental* se refiere más a *experimento* que a *experiencia*.

Para mí, el *quehacer matemático* o la actividad de hacer matemáticas es construir, manipular, estudiar, refinar, admirar y disfrutar los modelos mentales simplificados que nuestro cerebro puede crear a partir de cualquier tipo de procesos y sistemas, sean estos empíricos o imaginados y, paralela e interactivamente, formular, estudiar, refinar y desarrollar teorías apropiadas para dichos modelos.

Construir un modelo mental y formular una teoría apropiada para él requiere no solo identificar en cada modelo los distintos tipos o universos de componentes y los componentes específicos que se distinguen en cada tipo o universo, sino que también requiere tres esfuerzos más: identificar las propiedades y relaciones que pueden establecerse acerca de los componentes; identificar las transformaciones, operaciones o acciones que pueden realizarse sobre ellos y, finalmente, precisar y formular explícitamente las restricciones, conexiones internas, propiedades y correspondencias entre componentes, relaciones y transformaciones. Hablo del *sustrato* del modelo (sus universos de componentes), de la *dinámica* interna del modelo (su juego de operaciones y transformaciones), de la *estructura* interna del modelo (su red de relaciones) y de la *teoría* del modelo para cada uno de esos cuatro aspectos (Vasco *et al*., 1995, pp. 408-424). Diremos que la teoría se *interpreta* en el modelo y que el modelo *cumple* o *satisface* la teoría.

La actividad de construir y refinar los modelos corresponde al procesamiento mental llamado "análogo", y la formulación de las teorías, al llamado "proposicional" o "digital", en el sentido de los cuatro formatos de representación mental: Análogo, Proposicional, Esquemático y Asociativo del modelo SPAARS de *PoweryDalgleish* (1997).[2]

Al considerar el quehacer matemático como el juego con modelos y sus teorías, yo diría, por lo tanto, que hacer matemáticas se parece más a practicar las artes que las ciencias naturales y, si tuviera que escoger entre las artes, diría que hacer matemáticas se parece más a la composición en la

2 Traduzco así los cuatro formatos que estos autores distinguen en su modelo SPAARS: *Schematic, Propositional, Analogical,* and *Associative Representation Systems* (Power y Dalgleish, 1997).

música y al juego de variaciones sobre un tema musical que a la práctica de las artes plásticas tradicionales, como la pintura, la escultura y la arquitectura, aunque también es muy cercana a las artes contemporáneas posibilitadas por las nuevas tecnologías, como el arte multimedial. La práctica de las artes plásticas se parece más a la actividad de construir modelos mentales, vista desde esa perspectiva, pero el juego interno de modelos y teorías se asemeja más a la actividad creativa musical.

Es verdad que uno de los propósitos de las ciencias naturales –y al menos de algunas de las ciencias sociales y humanas– es también la producción de modelos y teorías; pero a diferencia de las matemáticas, en esas ciencias cada modelo permite derivar de su teoría ciertas conjeturas o predicciones que se contrastan contra la experiencia empírica que tenemos acerca de los procesos naturales o sociales que pretendemos modelar, ya sea a través de experiencias vividas en su flujo normal o a través de experiencias diseñadas y manipuladas para producir reacciones (experimentos). Si nuestro modelo y su teoría no se comportan lo suficientemente bien como para simular, explicar y predecir (o al menos retrodecir) los procesos que se querían modelar con su ayuda, hay que descartarlos. La experiencia empírica es la que rige las ciencias naturales y sociales, ya sea la experiencia cotidiana y no planeada que llamamos "natural" (por más que sea muy cultural), o la experiencia más refinada y cuidadosamente planeada que llamamos "experimento". Por coherente y elegante que sea el modelo y por refinada que sea su teoría, si no soportan la contrastación con la experiencia empírica, no sobreviven: peor para el modelo y la teoría. En cambio, en matemáticas, ese contraste con la experiencia empírica no es necesario. Si la realidad no se ajusta al modelo matemático y a su teoría, peor para la realidad.

Considero, por supuesto, que también se puede experimentar en matemáticas. En un trabajo temprano que realicé sobre el nacimiento de la teoría de grafos, señalé la importancia de recorrer con la punta de un lápiz, física o mentalmente, los siguientes dibujos (Figura 1, tomada de Vasco, 1978):

Trate de recorrer mentalmente los siguientes dibujos sin levantar el lápiz

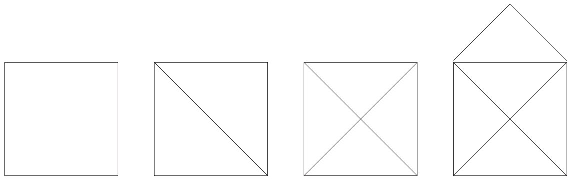


Figura 1
Gráficos para experimentar en matemáticas

Este tipo de experimentación empírica en matemáticas suele ser crucial para la construcción inicial, para el posterior refinamiento de un modelo mental y para la construcción paralela de una teoría apropiada. Pero una vez desarrollado un modelo lo suficientemente depurado para que mantenga su propia consistencia y permita formular una teoría apropiada para el mismo, ya no importan ni la experiencia ni la experimentación empíricas como criterios de supervivencia ni de calidad del modelo y su teoría. La palabra *consistencia* en la frase anterior fue escogida intencionalmente para enfatizar que la existencia de un modelo matemático requiere solo su consistencia, así sea en el curioso caso de un modelo para la lógica paraconsistente (Bobenrieth, 1996). Una selección más precisa de las palabras aconsejaría utilizar *coherencia* para los modelos y *consistencia* para las teorías. Así, el metateorema usual de la teoría de modelos diría que una teoría es consistente si puede interpretarse al menos en un modelo coherente.

Es claro que el creador de la teoría de grafos, Leonardo Euler, pretendía inicialmente construir un modelo simplificado y una teoría apropiada que le permitiera resolver el problema de si era posible o no recorrer en una caminata todos los puentes de Königsberg sin repetir ninguno. Si el modelo y la teoría resultantes no hubieran servido para distinguir el tercer dibujo de los demás de la Figura 1, es claro que no hubieran cumplido este propósito; pero una vez construido ese modelo con su teoría, aun en el caso de que Euler hubiera fracasado en el intento de resolver el problema inicial, dichosmodelo y teoría podrían haberse estudiado, refinado y analizado por sus propios méritos sin obstáculo ninguno; tal vez más tarde podrían haber servido para modelar otras situaciones.

No faltan matemáticos que se precian de estudiar modelos y teorías que no sirven para nada imaginable. Pero sus pretensiones de pureza están condenadas a que si sus modelos y teorías son lo suficientemente refinados y creativos, tarde o temprano servirán muchísimo, tal vez para lo que menos se habían imaginado sus inventores.

Un ejemplo geométrico

Supongamos que estamos desarrollando un modelo y una teoría para modelar el arte de dibujar figuras en una hoja de papel extendida sobre una mesa plana, con toques de tinta o lápiz que llamamos “puntos”, con rayas rectas que trazamos con una regla, y con circunferencias o arcos de ellas que trazamos con un compás, a las que llamamos “líneas”, entre las cuales distinguimos entre “rectas” y “curvas”.

A partir de nuestra experiencia empírica cotidiana podemos estar perfectamente seguros de que si los puntos no tienen ciertas mínimas dimensiones, no los podemos ver. En nuestro modelo mental son, pues, más bien pequeñas regiones, discos o figuras planas regulares o irregulares pero de dimensiones macroscópicas. Eso no obsta para que postulemos *en la teoría* que los puntos de nuestro modelo mental simplificado no tienen dimensiones.

Nuestra experiencia empírica nos dice que trazar una raya recta con una regla y un lápiz no es tan fácil como parece: se nos puede deslizar un poco la regla si con el lápiz hacemos mucha presión lateral, o el lápiz puede separarse de ella si no aplicamos la suficiente presión contra el borde. También sabemos por experiencia que esa raya tiene que ser lo suficientemente ancha para poderla ver, y por ello es más bien una banda de grafito con bordes aproximadamente paralelos que una recta matemática, sea ello lo que fuere. En el modelo mental son, pues, bandas estrechas de bordes paralelos. Pero al formular la teoría podemos postular que las rayas de nuestro modelo mental simplificado no tienen anchura ninguna, y que sin embargo son visibles al imaginario ojo de nuestra mente; además, podemos postular que son perfectamente rectas, aunque no sepamos explicar precisamente qué quiere decir eso. En caso de que algunos estudiantes inquietos desafíen nuestras estipulaciones, nos vemos obligados a recurrir a nuestra autoridad magisterial omnímoda para obligarlos a agachar la cabeza y aceptar dichas postulaciones teóricas, aunque no las entiendan.

Una vez que comprobamos por experiencia que dos puntos diferentes marcados sobre el papel nos permiten situar apropiadamente la regla para trazar un segmento de recta entre ellos, podemos suponer que entre cualquier pareja de puntos marcados en nuestro modelo mental del papel (la superficie de una inmensa hoja perfectamente lisa y sin combas ni arrugas que llamamos “plano”), podemos siempre trazar un único segmento de recta sobre ese plano, y podemos decir que esa afirmación es nuestro primer postulado del modelo geométrico simplificado.

Eso no excluye que, más tarde, podamos postular que en otros modelos sea posible trazar dos o más segmentos entre dos puntos; ni tampoco que podamos postular que haya parejas de puntos mutuamente invisibles entre los cuales no podamos trazar ningún segmento; ni tampoco es necesario postular que en todos los modelos siempre podamos prolongar un segmento más allá de los puntos que tiene como extremos; ni estamos seguros de que esas prolongaciones, aun en el caso de que sí existan, sean únicas. Pensemos por ejemplo que los puntos están marcados en dos bordes distintos de una hoja cuadrada, o al menos rectangular, como en el caso de la geometría del origami; una vez hayamos marcado entre esos dos puntos un nuevo segmento por medio de un doblez, ¿cómo prolongarlo?

Podríamos, pues, tener geometrías no-euclidianas porque no cumplen el primer postulado con respecto a la unicidad del segmento de recta entre dos puntos dados, o con respecto a la existencia del mismo, o con respecto a ambas cosas; o porque no cumplen el segundo postulado con respecto a la prolongabilidad de todo segmento de recta, de nuevo también porque tal vez no existan esas prolongaciones, o porque tal vez no se pueda garantizar su unicidad, o ninguna de las dos cosas. Y todavía no hemos enunciado, ni estudiado, ni modificado, ni mucho menos negado el tercer postulado sobre las circunferencias, ni el cuarto sobre los ángulos rectos, ni mucho menos el quinto postulado de Euclides sobre la existencia de parejas de rectas no secantes o sobre las secantes a parejas de rectas.

Una vez hayamos fijado mentalmente en la imaginación y en el dibujo –así como en el lenguaje mental interno y en el lenguaje social externo– ese modelo que acabamos de crear con una teoría adecuada al mismo, ya sea que ese modelo y esa teoría nos sirvan o no para modelar la situación que nos ofreció el incentivo o la disculpa para construirlos, podemos, sin más, empezar a estudiarlos, manipularlos, restringirlos, extenderlos, desarrollarlos, admirarlos y disfrutarlos. Ya no importa la experiencia empírica para continuar el juego. Ahora se trata más bien del disfrute de una experiencia interna muy cercana a la experiencia estética, pero reglada y disciplinada por los sucesivos refinamientos de la teoría.

La experiencia interna

La pregunta es si no estamos vivenciando aquí un nuevo tipo de experiencia, distinta de la experiencia empírica, originada sí en nuestras experiencias empíricas, pero que ni coincide ni se agota con ellas, que podríamos llamar "experiencia interna". Es claro que con ello no quiero decir que la experiencia empírica no sea también interna, ni que sea externa a la conciencia; más bien quiero insistir en que la experiencia empírica se deriva de las sensaciones y percepciones que parecen provenir de fuera de la mente, mientras que la materia prima de la experiencia a la que me refiero parece provenir de sus propios contenidos internos en el pasado y el presente. Podríamos, pues, decir que la experiencia empírica es una experiencia interna sobre actividades, materiales y estímulos externos, y aquella a la que quiero referirme es una experiencia interna sobre actividades, materiales, y estímulos internos; habría que hablar más precisamente de una experiencia externo-interna y de otra interno-interna, pero para abreviar, me referiré a la primera solo como “experiencia empírica” y a la segunda, como “experiencia interna”.

Esa experiencia interna es directamente accesible a nuestra conciencia, a ese –a la vez real e imaginario– ojo de nuestra mente; ella es la que nos posibilita empezar a hacer matemáticas, y al mismo tiempo saber que estamos haciendo matemáticas. Esa experiencia interna es la que nos permite incluso diseñar experimentos mentales, repetirlos controladamente en la experiencia interna o en la empírica, y registrar y analizar sus resultados.

Para Kant, la experiencia es sólo la experiencia empírica obtenida por los sentidos. En la edición A (1781) de la *Crítica de la razón pura*, dice que “la experiencia es sin duda el primer producto que elabora nuestro entendimiento con la materia bruta de las percepciones sensibles”.[3] En ello, Kant es heredero del empirismo inglés, su principal interlocutor después de que Hume lo ayudó a despertar de su sueño dogmático y llegar a su revolución copernicana respecto al papel activo de los dinamismos *a priori* del sujeto. Desde la terminología kantiana no parece apropiado decir que tenemos experiencia interna de esos dinamismos de nuestra mente, sino solo experiencia empírica de fenómenos aprehensibles por nuestra sensibilidad.

Pero más allá de Kant, podemos preguntarnos si hay o no una experiencia interna distinguible de la experiencia empírica, una vivencia de cierta actividad del pensamiento que nos permite una acción mental regulada, imaginable y al menos parcialmente comunicable por gestos, dibujos, palabras y símbolos, y que nos posibilita hacer algún tipo de experimentación mental y una repetición controlada de esos experimentos. Para mí, esa sería precisamente la experiencia interna que nos ayudaría a hacer geometría.

Una primera tesis de este trabajo es que, al menos en el comienzo de la geometría, sí se da esa experiencia interna, y que ella se basa ante todo en la experiencia empírica de nuestros movimientos en el espacio-tiempo, pero que no se agota en ella, sino que surge como diferente de ella en su reconstrucción y simplificación en nuestra memoria, imaginación y entendimiento.

Acepto, pues, que esta experiencia interna comienza en la experiencia corporal-kinestésica como experiencia empírica, proveniente de las lecturas neuronales y musculares propioceptivas que registran distintos movimientos nuestros, así sea los oculares únicamente. Estaría en esto de acuerdo con ciertos planteamientos de Papert (1980) y de Lakoffy Núñez (1999)

3 Traducción al castellano tomada de la edición hecha por Francisco Larroyo; ver Kant, 1972, p. 29, nota 2.

sobre el origen de las matemáticas, sobre los que volveré más adelante. La experiencia interna también podría derivarse de la experiencia visual, si el aparato visual está intacto; pero no podría limitarse a esa fuente visual, pues un ciego de nacimiento puede también tener esa experiencia interna que le permita iniciar la geometría y avanzar en ella. Afirmo, además, que una vez depurada esa experiencia empírica inicial –visual o no– tal como la utilizamos, por ejemplo, para hacer geometría, da lugar a una experiencia interna no dependiente de la experiencia corporal-kinestésica empírica ni de la visual, sino de sus reconstrucciones y simplificaciones en nuestro cerebro.

Esa independencia se puede constatar repetidamente en el trabajo mental sobre los modelos simplificados que analizamos y manipulamos en nuestra experiencia interna, los cuales, una vez llegan a un cierto nivel de estabilización y coherencia que nos permiten formularles teorías apropiadas, nos hacen experimentar no solo como innecesaria sino como irrelevante la contrastación ulterior con la experiencia empírica.

¿No es esa experiencia interna, precisamente, la experiencia matemática de la que escriben tan elocuentemente Davis y Hersch (1981) en su libro con ese mismo título? ¿No es ella la misma de la que tratan, entre muchas otras obras, la clásica conferencia de Poincaré,"La invención matemática" (Poincaré, 1908) y su no menos famoso comentario en el libro La psicología de la invención en el campo de las matemáticas de Hadamard (1945)?

La experiencia interna en el comienzo de la geometría

Volvamos al dibujo en el papel y a los distintos tipos de experiencia de los que somos conscientes al marcar los puntos, trazar los segmentos y dibujar las circunferencias. No se trata tanto de la experiencia empírica de observar el resultado de trazar el segmento con la regla, o el arco de circunferencia dibujado con el compás, sino de la experiencia dinámica de vivir el desplazamiento mismo de nuestra mano que se mueve en línea recta, guiada por el borde de la regla, o la del giro del puño y el brazo constreñidos por el compás, guiados por la rigidez de sus brazos, uno de ellos fijado por la punta enterrada en el sitio que llamamos "centro", y la experiencia interna de poder recordar, simplificar y repetir mentalmente esos movimientos, sin necesidad de mover un músculo.

Si no hubiéramos tenido muchas veces esas experiencias dinámicas y no pudiéramos reconstruirlas en nuestras experiencias internas, ¿nos sería posible definir los términos "desplazamiento", "traslación", "giro" o "rotación"?

Es un ejercicio altamente ilustrativo tratar de definir esas palabras abstractas, derivadas de los verbos "desplazar", "trasladar", "girar" y "rotar", los cuales a su vez tratan de comunicar una experiencia no verbal. Recuérdese por ejemplo el movimiento instintivo de la mano al tratar de explicar verbalmente qué es una curva helicoidal o una escalera de caracol.

Es igualmente ilustrativo buscar en distintos textos de geometría o de física, o en diccionarios y enciclopedias, cómo se definen esas operaciones básicas de la geometría y de la física. Una y otra vez, los círculos viciosos nos atraparán en sus volutas de anaconda: una rotación es un giro, un giro es una vuelta, una vuelta es una rotación.

Ensayemos de nuevo a buscar en los diccionarios y enciclopedias otra palabra básica: "desplazarse". Desplazarse, deslizarse, trasladarse, moverse, desplazarse… otro círculo vicioso. Tal vez algún purista trate de precisar que una traslación es un desplazamiento en línea recta. Pero el llamado "movimiento de translación" de la Tierra en su órbita, ¿es en línea recta o es en una órbita circular? ¿No será más bien elíptica? ¿Cómo es un desplazamiento en línea recta? ¿En qué difiere de otros tipos de desplazamiento? ¿Hay alguien que haya tenido la experiencia empírica de desplazarse en línea recta sin experimentar ninguna aceleración, ya sea gravitacional o de otro origen? Según la misma física newtoniana, no sería posible distinguir entre esa experiencia de un movimiento rectilíneo uniforme y la experiencia de estar en reposo.

No veo cómo pueda definirse desplazamiento, translación, giro o rotación sin acudir a la experiencia interna que sigue procesando, depurando y estilizando la experiencia empírica de desplazarse y de girar o de combinar desplazamientos y giros; en particular, trate el lector o lectora de revivir la experiencia interna de girar mientras se desplaza, o la de desplazarse sin girar ni sentir ninguna aceleración o freno lateral, tal como la hemos depurado y estilizado en nuestra memoria e imaginación, así nunca la hayamos experimentado empíricamente. Así estaría construyendo modelos mentales que le permitirían empezar a formular teorías que podríamos adscribir a la geometría dinámica.

En este sentido tienen razón Lakoffy Núñez (1999) al asignar el lugar de donde provienen las matemáticas a la corporeidad. Ya Papert (1980) había señalado la importancia de comenzar el trabajo matemático desde lo que él llamó "*body-syntonicmathematics*", "las matemáticas sintónicas con el cuerpo" (ver también Vasco, 1986/1990).Pero ese es un punto de partida, un origen que no se convierte en matemáticas hasta que no haya pasado de la experiencia empírica corporal-kinestésica a la experiencia interna depurada y estilizada, ya autónoma con respecto a su origen empírico.

Un argumento más en favor de la existencia de esta experiencia interna de nuestras reconstrucciones mentales del espacio-tiempo está tomado de la física, en particular de la cinemática, pues entiendo con mi maestro Carlo Federici que la geometría es una física general del espacio, y la cinemática, una física general del espacio-tiempo, que he llamado "cronotopía" (Vasco, 2006; 2007). El argumento es que –ya sea que la aceptemos o no– encontramos poca dificultad en comprender lo que sería la "Ley Cero" de la física de Newton: que el desplazamiento de un cuerpo en línea recta con velocidad constante no es un proceso que requiera fuerzas que lo mantengan, sino un estado indistinguible del estado de reposo.

Si reflexionamos un momento, llegamos a la misma conclusión anterior: nunca hemos tenido la experiencia empírica de un desplazamiento en línea recta con velocidad constante, ni podríamos estar seguros de haberla tenido. Pero a partir de experiencias empíricas recordadas, fragmentadas, reconstruidas, simplificadas y depuradas en nuestra mente, podemos perfectamente vivir esa experiencia interna que nos hace comprender lo que es ese tipo de movimiento, así no quedemos totalmente convencidos de que es indistinguible del estado de reposo ni de que es innecesario suponer una fuerza que lo mantenga. Pero necesitamos construir un modelo mental apropiado para que las frases y las fórmulas de la teoría newtoniana tengan sentido para nosotros.

La diferencia entre esos dos tipos de experiencias, la empírica y la interna, puede explicar también el éxito de la física aristotélica durante más de dos mil años, y la dificultad que tienen los estudiantes, aun los más aventajados, para comprender las leyes newtonianas. Paradójicamente, esa experiencia interna es el único puente que nos permite llegar a descifrar –al menos parcialmente– el significado de esas leyes. Pero no puede olvidarse que, como para el avance de un ejército, un puente es a la vez obstáculo y camino.

Otro argumento relacionado con el anterior es la seguridad con que distinguimos las trayectorias rectas de las curvas. Los profesores de matemáticas nos escudamos en una lectura superficial de Hilbert para responderles a nuestros alumnos cuando preguntan por la diferencia entre rectas y curvas trazadas en el plano, que en vez de planos, rectas y puntos, bien podríamos hablar de mesas, sillas y jarros de cerveza. Pero supongamos que algunos alumnos insisten en preguntar: ¿En qué se distinguen las sillas rectas de las curvas? En ese caso ya nos sentiríamos muy seguros de la respuesta; de nuevo no nos queda más remedio que apelar a nuestra autoridad magisterial omnímoda para hacer callar a nuestros estudiantes más inquietos. Más productivamente, podríamos invitarlos a vivenciar experiencias internas que pueden simplificar, depurar y aun contradecir sus experiencias empíricas, pero más bien los conminamos a aceptar que "recta" o "silla" es un término no definido. Así talvez podamos hacer algo de lógica, pero no geometría, ni podemos escapar de la agudeza de Russell cuando dice que las matemáticas son aquel galimatías que quienes lo hablan no saben lo que dicen ni si lo que dicen es verdad.

En cambio, sí podemos apelar a nuestra experiencia interna para distinguir rectas de curvas, y fijar un modelo y una teoría inicial apropiada a él, de tal manera que solo aceptemos segmentos de recta (además de semirrectas y rectas ilimitadas), sin aceptar curvas (o aceptando solo arcos de curvas que sean trozos de circunferencias o circunferencias completas o cerradas, o solo cónicas, pero no cualquier tipo de curvas).[4] Esta flexibilidad en la decisión permite vivenciar la libertad de la experiencia interna en el origen y el avance de las matemáticas.

La única posibilidad que tenemos de distinguir entre el círculo como figura regional (como son todas las de Euclides), que podríamos llamar "disco", y el círculo como figura lineal (aunque en Euclides no haya figuras lineales), que podríamos llamar "circunferencia", es apelar a nuestra experiencia interna de las reconstrucciones espacio-temporales de nuestras percepciones y movimientos.

Casi todos los profesores, y la mayoría de los textos de matemáticas que conozco, suelen definir rigurosamente "círculo" como "*el lugar geométrico de los puntos equidistantes de otro punto llamado centro*". Sin embargo, unos minutos o unas páginas más adelante, suelen decir que "*el área del círculo es pi-erre-cuadrado*". Si se hubieran tomado en serio su propia definición, el área de ese lugar geométrico tendría que ser cero.

No obstante, esa incongruencia no es fácil de detectar, pues –a diferencia de lo que creen los profesores de geometría– no estamos haciendo geometría escolar con las definiciones y los postulados, sino con la experiencia interna, y al acudir a ella, el salto de la frontera a la región encerrada por ella es inmediato e insensible. Tanto los alumnos como los profesores y autores de texto creen entender perfectamente de qué se está hablando, sin que esa prestidigitación sea consciente para ninguno de ellos, a pesar de sus declaraciones programáticas respecto al trabajo pretendidamente riguroso con el modelo expositivo geométrico euclidiano de definiciones, postulados y teoremas.

4 Nótese que no he dicho "círculo" ni "arco de círculo", sino "circunferencia" y "arco de circunferencia", pues para Euclides el círculo es la región limitada por la circunferencia, no la línea que la limita (así la frase "llamada periferia" sea una interpolación posterior en la definición 15, como lo anota Heiberg; ver Heath, 1926, vol. 1, p. 183f).

Una vez fijado mentalmente el modelo simplificado, podemos intentar ir en contra, no solo de nuestras experiencias externas, sino también de esas mismas experiencias internas que parecían determinar la diferencia entre desplazamientos en línea recta y en trayectorias curvas. Podemos, por ejemplo, remplazar las líneas rectas por circunferencias maximales (doblemente mal llamadas "círculos máximos") en una esfera, y continuar nuestro juego geométrico al estilo de Riemann, o mejor todavía, al estilo de los antiguos astrónomos y astrólogos babilonios, egipcios y griegos, que lo jugaron a la perfección milenios antes de Euclides.

Entre otras cosas, en la geometría de la esfera –que podemos considerar como un modelo simplificado de una pulida bola de cristal, de nuestro planeta Tierra, o de la aparente bóveda celeste– nuestra experiencia interna nos permite asegurarnos de que se cumple también el quinto postulado tal como lo redactó Euclides:

Si un arco de un mal llamado "círculo máximo" corta transversalmente a otros dos arcos del círculo máximo, y los ángulos internos en un lado del círculo máximo transversal suman menos de dos rectos, entonces los dos arcos del círculo máximo debidamente prolongados se cortan en ese lado del arco transversal.

Claro está que, en la esfera, esos dos arcos también se cortan por ese mismo lado si los ángulos internos suman dos rectos o más, y por supuesto también se cortan al otro lado; pero el cuidadoso enunciado de Euclides no prohíbe que eso suceda. Solo postula el corte para el caso en que se cumpla cierta condición, y no dice que si no se cumple la condición, no hay corte.

Esa prohibición la agregamos nosotros mentalmente por estar mal acostumbrados a que, en caso de que nos pongan una condición del tipo: "*Si se cumple el antecedente A, entonces sucede el consecuente B*", nosotros agregamos mentalmente "*y si no, no*". Son talvez rezagos de una niñez sometida a la autoridad omnímoda de los padres y los maestros.

¿Es entonces el modelo de la geometría de la esfera, tomando los llamados "círculos máximos" como rectas, una geometría euclidiana o no? Por lo menos parece cumplir el quinto postulado como lo propone Euclides. Sin embargo, se presenta frecuentemente como una geometría no-euclidiana. ¿Por qué?

Notemos de paso que, al remplazar las líneas rectas por arcos de circunferencias maximales, estamos contradiciendo nuestra experiencia interna de lo que es una trayectoria rectilínea. Notemos también que al remplazar el plano por la esfera o por una semiesfera, estamos contradiciendo la experiencia interna de lo que es una superficie plana. Pero para poderlo hacer, necesitamos haber practicado muchos años el juego geométrico euclidiano modelado en nuestra experiencia interna y refinado por el interjuego de esos modelos mentales espacio-temporales con las teorías formuladas en un lenguaje articulado o digitalizado. Más aún, todavía necesitamos de nuestra experiencia interna para reconstituir una superficie esférica y un arco de circunferencia maximal. ¿Podríamos aceptar que la línea ecuatorial es una circunferencia maximal sin acudir a la experiencia interna de moverla ligeramente sobre un modelo mental de la superficie terrestre y la de compararla con los paralelos? ¿Podríamos entender, sin esa experiencia interna, por qué los paralelos, a pesar de su nombre y de que efectivamente no se cortan, no corresponden a rectas paralelas en el modelo?

¿Es posible definir lo que es línea y plano, lo que distingue una línea recta de una curva, lo que significa estar entre dos puntos, o entre dos líneas, o lo que es un extremo de un segmento, o lo que es un ángulo de giro, o lo que significa ser colineal o coplanar, o lo que es estar a un lado o a otro de una línea en un plano... sin esa experiencia interna simplificada y refinada a partir de las experiencias empíricas espacio-temporales? Mi tesis en este trabajo implica que ello no es posible.

Un estudio de caso: la dimensionalidad en Hilbert

Analicemos, por ejemplo, una versión ligeramente modificada de los axiomas de dimensión de Hilbert.[5] El primero podría llamarse "Axioma del paso de la dimensión uno a la dimensión dos", o para abreviar: "Axioma 1-a-2":

- Axioma 1-a-2: Dados dos puntos no coincidentes, existe al menos un tercer punto no colineal con los dos primeros.

Sin la experiencia interna que hemos descrito, ¿es posible explicar qué significa que "dos puntos son no coincidentes", ya sea asumiendo o no que si dos puntos coinciden no son en realidad dos, sino son el mismo punto? ¿Es posible darle algún significado a la relación de colinealidad? ¿Es posible encontrar la manera de formular este axioma sin acudir a esa experiencia interna de producir un trazado en línea recta? ¿Es posible no experimentar como forzada y artificial una posible negación de este axioma 1-a-2 para el espacio vivenciado en esa experiencia interna?

Comparemos la situación con el paso de la dimensión dos a la dimensión tres:

5 Este ejemplo apareció en prensa en Vasco (2006).

- Axioma 2-a-3: Dados tres puntos no colineales, existe al menos un cuarto punto no coplanar con los tres primeros.

Sin la experiencia interna que hemos descrito, ¿es posible darle algún significado a la coplanaridad? ¿Es posible encontrar la manera de formular siquiera este axioma sin acudir a esa experiencia interna? ¿Es posible no experimentar como forzada y artificial una posible *negación* de este axioma 2-a-3 para el espacio vivenciado en esa experiencia interna?

Comparemos las dos situaciones anteriores con el axioma que debería seguir a los dos ya enunciados:

- Axioma 3-a-4: Dados cuatro puntos no coplanares, existe al menos un quinto punto no coespacial con los cuatro primeros.

Sin la experiencia interna que hemos descrito, ¿es posible darle algún sentido a la coespacialidad? ¿Es posible encontrar la manera de formular siquiera este axioma sin haber tenido esa experiencia interna y sin tratar de ir en contra de ella? ¿Es posible no experimentar como forzada y artificial una posible *afirmación* de este axioma 3-a-4 para el espacio vivenciado en esa experiencia interna?

Para hacer geometría en cuatro o más dimensiones, es necesaria la experiencia interna de la coincidencia, la colinealidad, la coplanaridad y la coespacialidad, además de la experiencia interna de la artificialidad y la extrañeza de tratar de seguir adelante, a pesar de que este tercer axioma tiene exactamente la misma forma lógica que los dos axiomas anteriores:

- Axioma (n)-a-(n+1): Dados (n+1) puntos no co-(n–1)-hiperplanares, existe al menos un (n+2)-avo punto no co-(n)-hiperplanar con los (n+1) primeros.

Aquí, por supuesto, la terminología es:

co-0-hiperplanares: coincidentes

co-1-hiperplanares: colineales

co-2-hiperplanares: coplanares

co-3-hiperplanares: coespaciales (en el mismo 3-hiperplano), etc.

Podemos interpretar que Hilbert estaba tratando de axiomatizar la geometría del plano y del espacio sin dejar agujeros lógicos, con el propósito de capturar con un número finito de axiomas consistentes, independientes y completos, todo lo que había pretendido hacer Euclides en sus libros estrictamente geométricos; pero ni Hilbert habría podido escoger sus axiomas sin acudir a su experiencia interna, ni nosotros podríamos apreciar el éxito o el fracaso de su programa sin apelar a la nuestra.

Las experiencias internas en el comienzo de la aritmética

Kant atribuía a los dinamismos *a priori* de la mente tanto la geometría como la aritmética. Se ha querido reducir la primera a la intuición *a priori* del espacio y la segunda a la intuición *a priori* del tiempo. No estoy de acuerdo con esa reducción.

Recordemos la solución que propuso Kant al problema de que el triángulo genérico no puede darse como figura imaginativa, pues en la imaginación tendría que ser un triángulo acutángulo, rectángulo u obtusángulo. Kant remplaza la figura imaginativa estática por el esquema activo del trazado de un triángulo: se traza un primer segmento de recta; se hace un giro en lo que podríamos llamar "un ángulo euclidiano" (es decir, mayor que cero grados y menor que 180); se traza otro segmento de recta; se hace un giro que permita quedar en la orientación precisa para que el tercer segmento de recta cierre la figura, y finalmente se traza ese tercer segmento de recta.

La solución es magistral; esa es la adoptada por Papert (1980) y su equipo de colaboradores en la geometría de la tortuga en el lenguaje LOGO. Pero no es una solución únicamente espacial: es también temporal, pues requiere primero un desplazamiento en línea recta, luego un giro, luego otro desplazamiento, luego otro giro que debe terminar precisamente al alcanzar la orientación exacta para tocar el comienzo del primer segmento, y luego un tercer desplazamiento que debe terminar precisamente al cerrar la figura. La temporalidad aparece permanentemente. La geometría no puede tener, pues, su origen solo en la intuición pura del espacio, sino en una compleja experiencia interna espacio-temporal.

La atribución de la aritmética a la intuición *a priori* del tiempo ha sido muy discutida, y no me detendré aquí en las controversias. Únicamente me fijaré en que sí es posible considerar fenómenos sucesivos en la conciencia como lo suficientemente diferenciados para distinguir el primero en el que caímos en la cuenta de que había sucedido, del segundo o del tercero, o dicho de otra manera, distinguir la primera vez que pasó el evento de la segunda o tercera vez que pasó "lo mismo", o "algo parecido".

Nótese que las palabras "repetir" y "repetición" implican una articulación compleja de "lo mismo" con "lo distinto": la ocurrencia de algo claramente distinto en el tiempo, pero lo suficientemente parecido en los demás aspectos para poder decir "es lo mismo".

Mi propuesta es que la aritmética no proviene inicialmente de las experiencias empíricas de contar objetos, sino de la experiencia interna de ordenar sucesos o eventos distinguibles en la conciencia, así sean originados en impresiones de los sentidos externos o de los propioceptivos, como latidos del corazón, palmoteos, golpes, ruidos o salidas del sol. Para decirlo en un aforismo:

"En el comienzo fue la ordinalidad y no la cardinalidad."

Por ello, para mí los antiguos números ordinales "primero, segundo, ..." son anteriores en la experiencia interna a los cardinales "uno, dos, ...". Más aún, no podrían contarse objetos de colecciones no subitizables sin atribuirles antes un orden interno "primero, segundo, ..." a los objetos de las colecciones figurales (en el sentido de Piaget y Szeminska, 1950).

Agregaría yo mismo: ni siquiera en un comienzo cuenta el niño los objetos, sino más bien los movimientos sucesivos de su brazo y su mano mientras va señalando el orden atribuido a los objetos. De aquí se derivan los principios del conteo ya precisados por Gelman y Gallistel (1978), y los errores debidos a repetir uno o varios objetos ya señalados, o a omitir alguno o algunos. Por esto yo prefiero referirme no al "conteo" sino más bien al "dedeo".

Si el lector ha podido seguir mi análisis anterior, estará de acuerdo conmigo en que sí puede decirse que la aritmética ordinal comienza con la experiencia interna del flujo temporal hecho transparente a la conciencia, no en sí mismo como flujo vacío, sino inicialmente por la sucesión de eventos o la repetición de los mismos. Es una digitalización de las variaciones de ese flujo que parece continuo en la experiencia interna.

Por algo la palabra "evento" tiene en español el sinónimo "suceso", de donde vienen "sucesivo" y "sucesión".[6] Solo más tarde se distribuye esta experiencia interna en el espacio-tiempo para iniciar la aritmética cardinal con el conteo de objetos apreciables de un solo golpe o *Gestalt* en una colección figural (el conteo por subitización).

Ese conteo se extiende por medio de la atribución de una ordenación específica a los objetos seleccionados visualmente, la cual sólo con el tiempo se llega a considerar por parte del aprendiz como indiferente, en el sentido de que cualquier ordenación específica que se le atribuya a la colección figural –y hay $n!$ ordenaciones diferentes para cada colección de n objetos– produce el mismo numeral final en el conteo con la lista estándar aprendida de memoria, al menos si el dedeo se ha hecho correctamente, o sea, sin

6 En inglés "*successive*" y "*succession*" tienen el mismo sentido que en español, pero el significado de la palabra "*success*" ha derivado hacia "éxito", perdiendo la denotación de "evento". Para mayores dificultades de traducción, en el análisis matemático "sucesión" no se dice "*succession*" sino "*sequence*".

saltarse o repetir, y si los objetos que se intenta contar se comportan dócilmente. No es fácil contar moscas en un basurero.

Si la aritmética no se constituye hasta no haber logrado articular la cardinalidad con la ordinalidad en el conteo de pequeñas colecciones figurales, la aritmética tampoco tiene su origen únicamente en la intuición pura del tiempo, pues para el conteo de objetos de la experiencia empírica es necesaria la atribución en la experiencia interna de un orden al despliegue espacial de la colección figural. Lo mismo podría decirse de ciertas colecciones que no estudió Piaget pero que son cruciales para el aprendizaje de la aritmética por parte de las personas invidentes: las colecciones táctiles. Para la aritmética se requiere, pues, también una compleja experiencia interna espacio-temporal, proveniente de reconstrucciones y digitalizaciones no sólo del flujo temporal, sino también de las perturbaciones del flujo visual o táctil a partir de un campo perceptual de fondo, reconstruido como liso y uniforme en la experiencia interna.

¿Es posible definir lo que es lo primero y lo segundo, lo que viene antes o después, sin ese refinamiento de las experiencias empíricas que he llamado "experiencia interna" de la sucesión temporal y la distribución espacial? ¿Es posible definir lo que es singular y plural, lo único y lo dual, lo uno y lo múltiple, sin esa experiencia interna de lo espacio-temporal que hemos depurado y refinado a partir de las experiencias empíricas de tipo visual, táctil y temporal que hemos vivido? Mi tesis en este trabajo implica que ello no es posible.

Un modelo lógico

Acabamos de experimentar, al repasar el enunciado del quinto postulado a la manera de Euclides en el aparte sobre la geometría, la tendencia interna de querer interpretar la condicional como bicondicional: al considerar el enunciado de que si se cumplen ciertas condiciones a un lado de una transversal a dos rectas, esas rectas se cortan a ese lado, difícilmente podemos resistirnos a agregarle mentalmente a ese enunciado el infundado "y si no, no".

Nuestra experiencia del autoritarismo paterno nos lleva a deformar la lógica y a leer una bicondicional en donde únicamente hay una condicional en un solo sentido. Pero una vez configurado un modelo lógico lo suficientemente coherente, al desarrollar su teoría podemos comenzar a poner y quitar conectivas y a exigirles propiedades que podemos postular en favor o en contra de la experiencia previa que hayamos tenido en nuestros intercambios lingüísticos y en su contraparte mental.

Podemos inventar una lógica en la que todas las conectivas condicionales sean bicondicionales, o inventar una conectiva condicional tan artificial que pueda ligar dos situaciones completamente disparatadas, como la expresada por la oración: "Si dos más dos son cinco, entonces yo soy Napoleón", postulando, por ejemplo, que esa conectiva condicional estrafalaria produzca siempre una proposición compuesta verdadera cuando el antecedente es falso o cuando el consecuente es verdadero. Por ejemplo, también sería verdadero decir: "Si dos más dos son cinco, entonces yo no soy Napoleón", o aun decir: "Si dos más dos son cuatro, entonces yo no soy Napoleón".

En efecto, muchos expertos en lógica matemática llaman con doble perversidad "implicación material" a esa conectiva estrafalaria que desafía nuestra experiencia lingüística, pues ni es una relación de implicación, ni tiene nada de material. Pero aunque sus estudiantes no entiendan nada (y con toda razón), esos expertos parecen no tener el más mínimo problema en aceptarla como coherente con su experiencia interna, sus modelos internos de razonamiento y sus teorizaciones de los mismos.

Así podemos hacer otro tipo de matemáticas al estilo de las distintas lógicas matemáticas, no solamente de la lógica aristotélica. Pero para saber por qué consideramos esos modelos como lógicos, qué es un tipo de lógica y cuáles lógicas son aristotélicas o no, hemos tenido que partir de nuestra experiencia interna, que esta vez es una experiencia de los flujos e intercambios de la información en la conciencia, ya sea digitalizados por el lenguaje articulado, ya directamente accesibles como sucesiones de imágenes, recuerdos y estados de conciencia.

Por ejemplo, podemos inventar lógicas no-aristotélicas porque –a diferencia de Aristóteles– nosotros sí aceptamos predicados vacíos, o porque postulamos conjunciones que no conmutan (trate de conmutar la "y" en la proposición compuesta: "Me pongo las medias y me pongo los zapatos", como lo analicé con ejemplos de lógicas temporales en un artículo sobre la formalización del lenguaje ordinario; ver Vasco, 1983), o porque no aceptamos la reducción al absurdo en su forma fuerte, ni el principio del tercero excluido, ni la eliminación de la doble negación, rechazados por los matemáticos intuicionistas.

Pero sin nuestra experiencia interna de los flujos e intercambios de información, no podríamos distinguir entre una frase declarativa y una interrogativa o una imperativa; ni entre una afirmación de una frase de la que estamos convencidos y una mera enunciación de la misma frase para su consideración por el interlocutor; ni entre una afirmación y una negación, que es a la vez afirmación de un rechazo; ni entre la conjunción de dos afirmaciones como afirmación conjunta y la mera disyunción débil como postulación de que creemos que al menos una de las dos frases pueda ser verdadera, o tal vez ambas, aun con el temor de que ninguna de las dos lo sea. Más importante todavía para iniciar el trabajo lógico-matemático, sin esa experiencia interna no podríamos distinguir entre la conjunción de dos proposiciones y la afirmación consecutiva de otras dos proposiciones cuando la segunda se deriva de la primera por un paso de inferencia. Nótese que en castellano la expresión “y entonces” puede significar solo la sucesión temporal o también la inferencial, y que en ambos casos utilizamos formas del verbo “seguir”, como “se sigue que”.

Esas son las experiencias internas en las que se reconstruye la experiencia vital de dialogar, de expresarse, de dar y pedir razones, de tratar de convencer y de dejarse convencer o rendirse ante la evidencia. Esas experiencias internas están al comienzo de toda lógica, y son las únicas que permiten distinguir un sistema lógico de un sistema geométrico o de un sistema abstracto, así ese mismo sistema geométrico o abstracto se utilice luego como modelo de un sistema lógico, o uno lógico de uno geométrico. Ni siquiera podríamos explicar lo que significa la última parte de la frase anterior sin esas experiencias internas dialogales, tan finamente expuestas por Kamlah y Lorenzen en su propedéutica a la lógica (KamlahyLorenzen, 1967; Lorenzen, 1955).

¿Es posible definir lo que es una proposición como diferente de una pregunta o una orden sin tener la experiencia interna de la aseveración de un enunciado como un compromiso personal del enunciador con la verdad de lo enunciado, al menos en la creencia y el deseo? ¿Es posible distinguir una sucesión de dos proposiciones enunciadas como una conjunción de ambas, de otra sucesión de proposiciones en las que la segunda se enuncia como derivada de la primera, sin tener la experiencia interna de la necesidad o la inevitabilidad de esa conexión intrínseca entre ellas? Mi tesis en este trabajo implica que ello no es posible.

La experiencia interna y el uso cuidadoso de la palabra “intuición”

Esta propuesta permite explicar por qué puede hablarse correcta y rigurosamente de intuición interna en matemáticas, no solo como la intuición *a priori* del sujeto kantiano, sino como el recurso inmediato a esas experiencias internas reconstruidas, refinadas y reorganizadas por las teorías que permiten iniciar la aritmética, la geometría y la lógica, y con ellas todas las exploraciones de la creatividad matemática.

La palabra "intuición" puede a veces ser utilizada en forma imprecisa e ideológica, y con razón se utiliza solo con reserva y desconfianza. Pero en la propuesta presentada aquí, limito su uso a la vivencia consciente, personal, inmediata e innegable de la experiencia interna, y en ese sentido la palabra "intuición" puede ahora utilizarse con precisión y seriedad. Más aún, su utilización se hace necesaria, pues no existe otra palabra para referirse a esa vivencia directa de la propia experiencia interna que se impone a la conciencia de cada uno de nosotros sin mediaciones ni dubitaciones.

Solo considero responsablemente utilizada la palabra "intuición" cuando se refiere a un conocimiento interno a partir de la experiencia interna, conocimiento que es consciente de ser in-mediato, o sea no mediado, directo y no indirecto, y cuando ese conocimiento es in-negable, o sea cuando no podemos negarlo consciente, sincera y responsablemente.

Cuando Hilbert postula en sus axiomas de dimensión que existen al menos tres puntos no colineales o cuatro puntos no coplanares, no tenemos que diseñar un experimento empírico para comprobarlos o refutarlos. Tenemos acceso inmediato a su comprobación, y esto es lo que significa estrictamente "intuición": la visión interna acompañada de la conciencia de que la verdad de esos postulados es inmediata y directa en el modelo mental que intuimos, y de que no podemos menos de declarar esos postulados como verdaderos en nuestra experiencia interna del espacio, sin poderlos negar sinceramente.

Esto no obsta para que inmediatamente después podamos ver qué sucedería si inventáramos un modelo que no cumpliera el segundo de esos postulados de dimensión, o uno que no cumpliera el primero. Pero solo podemos adquirir esa libertad creativa a partir de la intuición de nuestra experiencia interna y del esfuerzo por superarla. Solo a partir de esa experiencia interna del conocimiento intuitivo, es decir inmediato e innegable, podemos hacer el esfuerzo disciplinado por mediatizarlo por la teoría, y aun negarlo, con el fin de empezar a estudiar únicamente su consistencia interna, independientemente de la verdad o de la certeza.

Esta libertad de avanzar aun en contra de la experiencia interna previamente considerada como inmediata, indubitable e innegable es lo que dificulta la referencia a la intuición en las matemáticas y lo que lleva a los delicados análisis de Fischbein (1987) sobre la evolución de la intuición con el avance en la práctica y en la reflexión de un matemático avezado.

Con la referencia a la intuición como conocimiento interno de la experiencia interna propuesta antes, no hay dificultad en seguir el razonamiento de Fischbein ni en entender por qué seguir el paso de una demostración que para un matemático avezado es "intuitivamente evidente", puede tomarle semanas de duro trabajo a un estudiante graduado. La evolución y el cultivo de la intuición en Fischbein es precisamente el ejercicio de seguir refinando, depurando y estilizando la experiencia interna con el juego de modelos y teorías, de tal manera que podamos hacer que esa experiencia sea cada vez más flexible, creativa e independiente de sus orígenes en la experiencia empírica.

Sin embargo, en el aparte que dedica Fischbein a la relación entre experiencia e intuición, hay que tener cuidado con el uso de "experiencia" para la experiencia empírica en el sentido kantiano de la expresión. Creo que se enriquece el trabajo ya clásico de Fischbein con las precisiones propuestas anteriormente para el uso de las expresiones "experiencia empírica" y "experiencia interna", y para la redescripción de la intuición, tanto para el acto de hacer conciencia de la inmediatez de la experiencia interna, como para el resultado de ese acto.

Solo a partir de nuestra experiencia interna de afirmar algo a la vez como verdadero, como cierto y como coherente con otras afirmaciones, podemos empezar a distinguir el concepto de verdad relacionado con la coherencia semántica entre enunciados de la teoría y modelos mentales; el concepto de certeza como actitud subjetiva de seguridad de la verdad de una afirmación, independientemente de la verdad de la misma, y el concepto de consistencia lógica entre enunciados, como independiente de la verdad y de la certeza que tengamos de los mismos.

Es necesario reflexionar sobre la fina propuesta inicial de Raymond Duval a este respecto. En su análisis del razonamiento se puede ver con claridad cómo sin tener presente la distinción entre *estatus* (para Duval, teórico u operatorio) y valores (para él, valor epistémico semántico y valor de verdad), no estamos enseñando a nuestros alumnos a demostrar, sino solo a convencer a otros con argumentos retóricos; este tipo de argumentación puede ser muy importante, pero no es suficiente para garantizar la aceptación de una proposición como teorema en las matemáticas actuales. La única manera de avanzar en la comprensión de las distinciones anteriores y de aprender lo que es una demostración formal es procurar tener la experiencia interna de asignar y de cambiar el estatus a un enunciado específico, lo que no aparece en las representaciones escritas en lenguaje natural, pero puede hacerse visible por medio de diagramas arbolares y grafos dirigidos (Duval, 1999/1995, cap. V).

Avanzando en este camino, propongo más bien distinguir al menos cuatro estatus de un enunciado matemático, dos lógicos y dos epistémicos, y dentro de cada uno distinguir los distintos valores que podemos asignarles a diversos enunciados que tienen ese mismo estatus, por lo menos durante una fase precisa del razonamiento. Podríamos distinguir así el estatus lógico-sintáctico de un enunciado acerca de su conformación, con los valores correcto, incorrecto, inasignable; el estatus lógico-semántico que atribuimos a un enunciado acerca de su verdad, con los valores verdadero, falso, indeterminado; el estatus epistémico subjetivo acerca de la certeza, con los valores cierto, plausible, probable, imposible u otros, y el estatus epistémico operatorio acerca de si se trata de una proposición axiomática, hipotética, conjetural, teoremática o de una regla de inferencia, valores que corresponden a la distinción entre un punto de partida general y uno particular de una demostración, lo propuesto a demostración, lo ya demostrado y los medios de pasar de los enunciados previos al siguiente.

No trato ahora de discutir los méritos y dificultades de esta propuesta o de la de Duval, sino de hacer caer en la cuenta de que no es posible ni siquiera vislumbrar qué se está tratando de lograr con estas distinciones y con la escala de los valores propuestos si no se apela a la experiencia interna de considerar enunciados matemáticos y de tratar de probarlos o refutarlos.

En forma similar, cuando decimos que una relación de inferencia tiene que tener cierto tipo de reflexividad que permita inferir la misma frase de otra instancia de ella misma anteriormente enunciada; o que tiene que tener cierto tipo de transitividad que permita inferir directamente de la primera, una tercera frase que fue inferida anteriormente de una segunda frase inferida de la primera; o que tiene que tener cierto tipo de monotonía que permita remplazar una hipótesis por otras frases de las cuales esa hipótesis pueda inferirse como un lema, estamos haciendo uso de una intuición que nos permite leer nuestra experiencia interna sin intermediarios (Hacking, 1994; Gabbay, 1994).

Nadie que no tenga esa experiencia puede entender lo que estamos diciendo, ni por qué exigimos esas propiedades y no otras cuando queremos delimitar las características de una relación de inferencia. No podemos precisar lo que queremos decir por "relación de inferencia" a quien se resista a apelar a la propia intuición inmediata e innegable de esa experiencia interna que seguramente ha tenido: la de vivir flujos de información que le han permitido extraer nueva información a partir de formulaciones previas.

Cuando decimos que una pareja de elementos diferentes está ordenada o no, y que en caso de que la consideremos ordenada solo podemos cambiarle el orden de una única manera; o cuando decimos que podemos pensar en un caso en que una colección tenga solo un elemento, y que esa colección se puede representar escribiendo primero un corchete, luego un símbolo del elemento, y por fin otro corchete, estamos haciendo uso de nuestra intuición inmediata de las experiencias internas de tipo aritmético-ordinal, geométrico-espacial y lógico-dialogal.

No podemos definirle a nadie la diferencia entre segmento de recta orientado y no orientado, o entre una colección de dos o tres elementos con o sin orden, a menos que sepamos que esa otra persona también ha tenido ciertas experiencias internas, y que tiene acceso directo a ellas en su intuición inmediata e innegable de las mismas.

Pero una vez que aceptamos esas experiencias internas y nuestra intuición de las mismas en nuestra conciencia, podemos empezar a desafiar creativamente dichas intuiciones por medio del interjuego de los modelos mentales con las teorías; a suspender libremente las inferencias directas e indirectas que antes podíamos considerar como inevitables y necesarias, y aun atrevernos a negar lo que antes no podíamos menos que considerar como innegable. Pero esa libertad, esa creatividad y esa capacidad de suspender y aun negar nuestras intuiciones geométricas, aritméticas y lógicas solo pueden darse en el ámbito mismo de esas experiencias internas y en contraste con ellas.

Conclusión

Considero, pues, que la geometría, la aritmética y la lógica se inician con experiencias internas que no deben ser llamadas “empíricas”, pues pueden repetirse a voluntad sin temor a que la empiria las “refute”, “falsee” o “falsifique”, por más que tengan su origen en la corporeidad-con-mente de los seres humanos, que experimentan como organismos conscientes la sucesión de los eventos, el movimiento, la acción, la distribución espacial de variaciones perceptuales, el flujo de información en el pensamiento y en el diálogo, pero que pueden reconstruir, refinar, digitalizar y reorganizar esa experiencia empírica en una experiencia interna.

Esta propuesta permite explicar en qué sentido pueden tener razón los que quieren asignarle un origen empírico a las matemáticas, al estilo de Philip Kitcher (1984), y bajo qué derrotero ellos mismos extenderían abusivamente el calificativo de “empírica” a la experiencia interna que ya no depende del tribunal de la experiencia empírica; por ello, es más prudente llamarla “cuasi-empírica”. Una vez iniciado el proceso de construcción de un modelo matemático con su teoría, el estudio ulterior, los refinamientos, las variaciones y el disfrute de ese modelo y su teoría ya no dependen de comprobaciones ni refutaciones provenientes de la realidad sensible, sea ella lo que fuere, considerada por los empiristas como la única fuente de nuestras experiencias. A lo más, habría que considerar la experiencia empírica como fuente indirecta de nuestra experiencia interna, la cual se independiza de su fuente al comenzar a hacer matemáticas, y de allí en adelante no tiene que someterse ya más a la tutela de la empírica.

Hace ciento veinte años Georg Cantor optó por seguir su experiencia interna y sus cultivadas intuiciones para crear una nueva teoría de conjuntos, a pesar de la oposición generalizada de los cancerberos de las matemáticas universitarias y las revistas de prestigio, y a pesar de su propia impresión de estar encontrando paradojas en todos los recodos del camino.

Hace cien años David Hilbert optó por aceptar la teoría cantoriana de conjuntos a pesar de las paradojas propuestas por Cantor mismo y las detectadas por otros lógicos ingleses e italianos. Hilbert confiaba en su experiencia interna, en su intuición cultivada y creadora, así Gödel fuera a echar por tierra alguna de sus muchas propuestas treinta años más tarde.

A pesar de aparecer como enano al lado de esos gigantes, con Cantor y con Hilbert quiero trepar sobre sus hombros para apostarle también hoy a la experiencia interna y a la intuición cultivada como lugar privilegiado de la creatividad matemática.

¿Quién nos limitará la libertad de creación en las matemáticas? Una vez que nos movamos libremente en este mundo de la experiencia interna, de este paraíso matemático no nos podrá expulsar ningún arcángel con su espada de fuego. Pero en el principio fue esa experiencia interna que produjo y sigue produciendo una intuición inmediata e innegable. Sin ella no hubiéramos podido intuir el paraíso.

Referencias bibliográficas

Bobenrieth, A. (1996). *Inconsistencias: ¿por qué no? Un estudio filosófico sobre la lógica paraconsistente*. Santafé de Bogotá: Tercer Mundo Editores.

Davis, P. J. & Hersch, R. (1981).*The mathematical experience.* Boston: Birkhäuser.

Duval, R. (1999/1995).*Semiosis y pensamiento humano*. Cali: Universidad del Valle-IED-GEM. (Trad. del original francés: *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, 1995).

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht, Holland: D. Reídel.

Gabbay, D. M. (1994). *What is a logical system?* En: D. M. Gabbay (pp. 179-216). Oxford, New York: Oxford University Press.

Gelman, R. & Gallistel,C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Hacking, I. (1994). What is logic? En: D. M. Gabbay (Ed.).,*What is a logical system?* (pp. 1-33). Oxford, New York: Oxford University Press.

Hadamard, J. (1945). *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, NJ: Princeton University Press. [La obra original es en inglés, escrita por Hadamard para un curso que dictó en Nueva York en 1943; la traducción francesa apareció solo en 1959: *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, traduit de l'anglais par Jacqueline Hadamard. Paris: Librairie Scientifique Albert Blanchard.]

Heath, T. (1926). *The thirteen books of Euclid's Elements* (2nd ed.).Cambridge, UK: Cambridge UniversityPress. [Hay reedición en New York: Dover, 1956, con sucesivas reimpresiones].

Kamlah, W. & Lorenzen, P. (1973). *Logische Propädeutik: Vorschule des vernünftigen Redens* (2. Aufl.). Mannheim/Wien/Zürich: BibliographischesInstitut.

Kant, I. (1972). *Crítica de la razón pura* (Estudio introductorio y análisis de la obra por Francisco Larroyo). México: Porrúa.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. New York/Oxford: Oxford University Press.

Lakoff, G. & Núñez, R. (1999). *Philosophy in the flesh: the embodied mind and its challenge to Western thought*. New York: Basic Books.

Lorenzen, P. (1955). *Einführung in die operative logik und mathematik*. Berlin: Springer-Verlag.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: children, computers, and powerful ideas*. New York: Basic Books.

Piaget, J. & Szeminska, A. (1950). *La genèse du nombre chez l'enfant. Neuchâtel:* Delachaux&Niestlé.

Poincaré, H. (1908). L'invention mathématique. *L'Enseignement Mathématique*, 10(5), 357-371.

Power, M. & Dalgleish, T. (1997). *Cognition and emotion: from order to disorder.* Hove, UK-New York, NY: Psychology Press (Reimpreso 2003).

Vasco, C. E. (1978).Estratificación conceptual del proceso de producción de conocimientos matemáticos. *Ideas y Valores*, pp. 53-54, 99-112.

__________________ (1983). Conectivas secuenciales y la formalización del lenguaje ordinario. *Matemática-Enseñanza Universitaria*, 27, 12-23.

__________________ (1986). Learning elementary school mathematics as a culturally conditioned process. En: M. I. White & S. Pollak (Eds.). *The cultural transition: human experience and social transformation in the Third World and Japan* (pp. 141-175). Boston-London: Routledge & Kegan Paul. [Hay traducción al castellano: Vasco, C. E. (1990). El aprendizaje de las matemáticas elementales como proceso condicionado por la cultura. *Comunicación, Lenguaje y Educación* (Madrid), n.6, 5-25.]

_________________ (2006). Cronotopía: un "Programa de Bogotá" para lo que se suele llamar "Geometría". En: C. Ruiz *et al.* (Eds.). *Memorias: XVI Encuentro de Geometría y sus aplicaciones - IV Encuentro de Aritmética* (Bogotá, junio 23-24-25 de 2005, vol. 1, 1-28). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

__________________ (2007). La cronotopìa o la matematica dello spazio-tempo, prima e dopo la metrica. *La Matematica e la sua Didattica* (Bologna), 21(4), 455-470.

Vasco, C. E. *et al.* (1995). La teoría general de procesos y sistemas. En: Misión Ciencia, Educación y Desarrollo, *Educación para el Desarrollo* (Colección Documentos de la Misión, tomo 2, 377-652). Santafé de Bogotá: Presidencia de la República-CPDI-Colciencias.

La experiencia figural. Algunas reflexiones sobre el papel de las figuras en la geometría plana

Olga Lucía León C.[1]
Carlos Álvarez J.[2]

Presentamos en este capítulo una reflexión sobre un tipo de experiencia llevada adelante a través de las figuras. Una experiencia que está, a su vez, vinculada directamente al texto y a la lectura del libro I de la obra *Elementos* de Euclides. Una primera observación que haremos es que nuestro estudio se referirá únicamente a la geometría plana, a esa geometría que con justicia histórica es llamada geometría *euclidiana*, centrando nuestro interés en el papel que en ella tienen las figuras. La atención se dirige al modo en que las figuras se inscriben en la demostración geométrica, para intentar comprender el lugar que ellas ocupan en las inferencias que, a partir de los axiomas, dan lugar al resto de proposiciones que forman el cuerpo de la geometría.

Introducción

El tema de la relación entre la experiencia y las matemáticas nos sitúa de inmediato en el centro de un debate largo y controvertido. Mucho se ha dicho a propósito del tema, acerca del papel que la experiencia tiene o puede tener en matemáticas, mucho se ha discutido también acerca de sus proposiciones y verdades. ¿Es legítimo decir que la verdad matemática debe algo a la experiencia? Es claro que la respuesta a esta pregunta depende de lo que se entienda por cada uno de los términos cuya relación se establece aquí: es innegable que si de ellos se predispone una noción determinada, fija y acabada, entonces la respuesta está dada desde el inicio. El concepto que se tenga de “matemáticas” permitirá aclarar cuál es su relación –si es que acepta tener alguna– con la experiencia. De igual modo, si se considera que la “experiencia” es un tipo específico de actividad humana, la forma de caracterizarla permitiría adelantar su posible vinculación con una disciplina como las matemáticas. Conscientes de este hecho trivial, no nos proponemos adelantar ninguna hipótesis acerca de lo que es la matemática o de lo que es la experiencia y esperamos que, en

1 Universidad Distrital Francisco José de Caldas – Universidad del Valle. Investigación realizada en el marco de la investigación Doctoral de la autora. Doctorado Interinstitucional en Educación, Énfasis en Educación Matemática.

2 Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM. Investigación realizada con apoyo del proyecto Conacyt 400302-5-25269H.

la medida en la que nuestras ideas se exponen, sea posible delinear una posición clara respecto de cada uno de estos términos y de su relación.

La idea de que las matemáticas son una ciencia deductiva, que al tomar como base a un conjunto de proposiciones iniciales, las otras proposiciones se obtienen mediante la aplicación de una serie de reglas de inferencia, permite delinear una posición que considera que la experiencia se encuentra –vinculada de alguna manera– en el origen de las proposiciones que sirven de base a la geometría. Esta idea abarca un espectro tan amplio que permite el reencuentro de posiciones teóricas tan alejadas como las de Gauss y Frege, quienes coinciden al señalar que las proposiciones iniciales de la geometría, los axiomas o postulados geométricos, deben su origen a un cierto modo de experiencia. Frege considera que los axiomas o proposiciones básicas de la geometría son proposiciones verdaderas derivadas de una *experiencia primaria*, razón por la cual esta ciencia difiere de la aritmética, la única ciencia verdaderamente universal, necesaria y previa a toda experiencia, la única ciencia *a priori*. Por su parte Gauss señala que la geometría puede ser considerada como una rama de la mecánica y en este sentido no solo sus axiomas son la descripción de hechos intuitivamente evidentes, derivados precisamente de la experiencia sensible, sino que aun en el modo específico en el que las verdades geométricas se obtienen a partir de estos axiomas, es posible dar un lugar a la experiencia. Es así que podemos comprender una parte de su "experimento" diseñado para comprobar si la suma de los ángulos internos de un triángulo es o no igual a dos rectos.[3]

Pero nuestra investigación no buscará ahondar en este camino, ya suficientemente andado y recorrido, sobre el posible carácter experimental de las hipótesis de la geometría. Queremos, en cambio, abrir el espacio de reflexión a un tipo de experiencia llevada adelante a través de las figuras. Una experiencia que está a su vez vinculada directamente al texto y a su lectura. Una primera observación que haremos es que nuestro estudio se referirá únicamente a la geometría plana, a esa que con justicia histórica es llamada geometría *euclidiana*, centrando nuestro interés en el papel que en ella tienen las figuras, las cuales desempeñan –en el modo específico de argumentación geométrica– un rol en la trama argumentativa global de la geometría. Nuestra atención se dirige entonces al modo en el que las figuras se inscriben en la demostración geométrica, para intentar comprender el lugar que ellas ocupan en las inferencias que, a partir de los axiomas, dan lugar al resto de proposiciones que forman el cuerpo de la geometría.

Si encontramos, por ejemplo, que todo razonamiento geométrico –e insistimos una vez más en que nos referimos únicamente a la geometría

3 Nos referimos al capítulo bien conocido de la medición de los ángulos de un triángulo cuyos vértices son las cimas de los montes Hoher Hagen, Brocken e Inselsberg.

euclidiana– es un razonamiento sobre las figuras y guiado por ellas, vale decir que toda inferencia en geometría es una inferencia dada y posibilitada por ellas. Entonces podremos concluir que será a través de la experiencia que de ellas se tiene, que depende, en gran medida, toda la geometría. Una conclusión obtenida a través de una figura, un razonamiento guiado por ella, podría en este caso considerarse como el resultado de este singular tipo de experiencia.

No debemos olvidar que la presencia de las figuras en el texto euclidiano tiene un origen tan difícil de discernir como el origen del texto mismo. Basta comparar un manuscrito tan antiguo como el *Manuscrito Vaticano* (ms. Vaticano, Gr. 190) que data del siglo X, para constatar que las figuras desempeñan en él un papel secundario y aparentemente marginal. No es claro en qué momento de la historia del texto de Euclides las figuras tomaron el papel que hoy tienen, pero es indudable que está íntimamente vinculado con un cambio en el modo en el que este texto fue leído, cambio que nos parece claro percibir ya en la matemática del siglo XVI. Pero junto con este hecho, podemos observar también que las figuras están relacionadas, al menos, con tres tipos de entidades distintas a lo largo de los trece libros de la obra euclidiana. Como lo ha señalado Gardies (1997), los *Elementos* se ocupan de tres tipos de entidades matemáticas y en su estudio las figuras no son presentadas de manera idéntica:

1. En los libros I, II, III, IV, VI, XI, X, XII y XIII las entidades son de orden propiamente geométrico.
2. Los libros VII, VIII y IX, los aritméticos, se ocupan de lo que los griegos llaman números.
3. El libro V se ocupa de las magnitudes en abstracto.

De tal manera que en el primer caso se tienen las figuras que se conocen como *figuras geométricas*, en donde una recta representa una recta, un círculo representa un círculo, un triángulo representa un triángulo, a diferencia de lo que sucede en los otros dos casos, en donde los números o las magnitudes abstractas son representados con segmentos de recta. En nuestro estudio solo nos ocuparemos del papel de la figura en el primero de los tres casos señalados anteriormente.

Debemos indicar también, que nos ocuparemos de una lectura más interesada en discutir un problema de naturaleza epistemológica que uno de naturaleza propiamente histórica, pero curiosamente vamos a centrar nuestra atención en algunas proposiciones en las que las figuras desempeñan un papel distinto al que hemos descrito brevemente. Nos referimos a algunas proposiciones en las que la conclusión y punto central del argumento geométrico se desprende de lo que en ellas se puede ver y leer. Para comprender este punto veremos algunas de estas proposiciones y cómo en ellas las figuras determinan y funcionan como un cierto instrumento experimental.

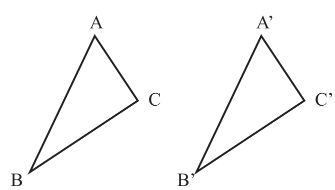
Las tres experiencias que a continuación se presentan, surgen de un tejido axiomático propio de la geometría euclidiana; prescindir de la primera experiencia, y en consecuencia de su efecto en las otras dos, será la fuente para proponer otro tejido axiomático, el de los *Fundamentos de la Geometría,* de David Hilbert (1899/1997).

Primera experiencia: el movimiento de las figuras y la determinación de la igualdad

En este caso confrontaremos, como en todos los demás, el papel que se da a las figuras en el texto y el contexto euclidiano. Comenzaremos analizando la proposición I-4 de los *Elementos*, recordando que se trata del primer teorema demostrado en el texto. Esta proposición asegura la igualdad de dos triángulos bajo la hipótesis de que dos de sus lados coinciden, junto con el ángulo formado por estos dos lados. Este teorema –nos referiremos a él como *T(LAL)*– se puede parafrasear del modo siguiente:

T(LAL): Un triángulo está determinado de manera única por dos de sus lados y el ángulo formado por ellos.

Desde luego que el primer aspecto que precisa aclaración –en torno de esta proposición– es el sentido que en ella tiene la igualdad que se asegura existe entre los dos triángulos. Dicho en otras palabras, si se parte del triángulo[4] **T**[ABC] (al que denotamos simplemente como **T**) y el triángulo **T**[A′B′C′] (denotado como **T′**), el teorema asegura que de las igualdades **L**[AB] = **L**[A′B′], **L**[AC] = **L**[A′C′] y *a*[BAC] = *a*[B′A′C′] se concluye que **T = T′**.



Gráfica 1. Teorema LAL

4 En adelante denotaremos con **L**[AB] al segmento de recta cuyos extremos son los puntos *A y B*; con *a*[BAC], al ángulo formado en el vértice *A* por los dos segmentos **L**[BA] y **L**[AC], que se encuentran en este punto; finalmente, con **T**[ABC] denotaremos al triángulo cuyos vértices son *A, B y C.*

Es claro que en este enunciado se incluyen 4 igualdades; 3 de ellas se asumen por hipótesis y una más que se debe concluir. Para comprender el sentido de estas igualdades, el autor de los *Elementos* solo dispone del criterio que se encuentra en la noción común 4 que asegura:

N.C.4. *Las cosas que coinciden entre sí (que se ajustan entre sí) son iguales entre sí*.

En esta noción común parece claro que cuando dos "cosas" (magnitudes, figuras planas o cuerpos sólidos) se ajustan la una a la otra, lo que significa que una está superpuesta sobre la otra y de este modo coincide con ella, entonces serán iguales. Este criterio de igualdad no puede ocuparse de establecer los medios para llevar a dos cosas a superponerse para verificar su posible igualdad. Ello nos obliga a suponer, a manera de hipótesis, que los lados **L**[AB] y **L**[AC] del primer triángulo podrían ajustarse y coincidir con los lados **L**[A′B′] y **L**[A′C′] del segundo, lo mismo que el ángulo *a*[BAC] lo haría con el ángulo *a*[B′A′C′], si es que fuese posible disponer de algún medio para llevarlas a superponerse unas sobre las otras.[5] Pero al aceptar esta hipótesis nos vemos conducidos a esperar que los triángulos **T** y **T′** coincidirán al superponerse uno sobre el otro, dando con ello la prueba de su igualdad.

No cuestionamos el resultado esperado de la experiencia de llevar al triángulo **T** a sobreponerse sobre el triángulo **T′**, sino el hecho mismo de que esta experiencia sea posible. Antes de explicar con cierto detalle este problema, veamos cómo procede el autor de los *Elementos*. Recordemos que la demostración (αποσειξις - apodeixis) de esta proposición se apoya en la construcción (κατασκευη - kataskeuê)[6] siguiente:

> *el triángulo* **T = T***[ABC] se aplica al triángulo* **T′ = T***[A′B′C′] y el punto B se coloca sobre el punto B′ y la línea recta* **L***[AB] sobre* **L***[A′B′] (Euclides, 2000, p. 206)*[7].

De esta construcción se desprende el argumento que busca demostrar la igualdad, entendida bajo el mismo criterio de la noción común 4, del triángulo **T** con el triángulo **T′**. Si se trata de dos figuras rectilíneas que

5 Aunque no podemos dejar de notar que al aceptar esta suposición hemos de alguna manera invertido el sentido de la Noción Común 7, ya que en este caso se asegura que "cosas" que son iguales coinciden entre sí.

6 Nos referimos a la cuarta etapa o al cuarto momento de una proposición geométrica, tal y como esta fue caracterizada en su forma general por Proclus en su *Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides* y que son: la enunciación (προτασις - protasis), la exposición (εκθεσι - ekthesis), la especificación (διορισμος - diorismos), la construcción (κατασκευη - kataskeuê), la prueba (αποδειξις - apodeixis) y la conclusión (συμπερασμα - symperasma).

7 Se utiliza la primera reimpresión de la traducción de Madrid: Gredos, publicada en 1991.

son iguales, ellas lo son en virtud de que se ajustarán entre sí, siempre que sea posible dejar caer una sobre la otra. Este es claramente el sentido de la expresión "el triángulo **T** se aplica al triángulo **T'**…" (*Epharmozomenou gar tou ABG trigônou epi to DEZ trigônon kai tithemenou tou men A*)[8] que sugiere que de alguna manera se toma el triángulo **T** y "se deja caer sobre", "se superpone" al triángulo **T'**. El problema es que Euclides no ha introducido hasta este momento –recordemos que nos encontramos en la cuarta proposición del primer libro y solo disponemos de las definiciones, los postulados, las nociones comunes y las tres primeras proposiciones– ninguna operación que permita llevar a cabo dicha operación de superposición de una figura sobre otra. En otras palabras, no es claro si la coincidencia –hipotética– de los lados **L**[AB] y **L**[A'B'] y de los lados **L**[AC] y **L**[A'C'], junto con la coincidencia –también hipotética– de los ángulos *a*[BAC] y *a[*B'A'C'], son de algún modo las condiciones iniciales para llevar a cabo la experiencia de *aplicar* el triángulo **T** sobre el triángulo **T'**, o bien si esta aplicación es posible independientemente de estas igualdades. Pero antes de intentar aclarar este punto, sigamos de cerca el modo en el que termina el argumento dado por Euclides para esta proposición. Una vez que se ha aplicado el triángulo **T** sobre el triángulo **T'**, de modo que el punto *B* se coloca sobre el punto *B'* y el lado **L**[AB] sobre el lado L[A'B'], Euclides presenta como prueba (αποσειξις - apodeixis) la lectura hecha de este *experimento* pensado que consistió en haber tomado el primer triángulo y haberlo aplicado sobre el segundo:

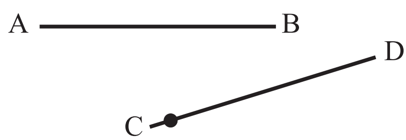
> *el lado* **L***[AB] coincide con el lado* **L***[A'B'] y el lado* **L***[AC] también coincidirá con el lado* **L***[AC'], en virtud de que el ángulo a[BAC] es igual al ángulo a[B'A'C']; por lo tanto el punto C coincidirá con el punto C'. Pero el punto B coincide con el punto B', por lo que la base* **L***[BC] coincide con la base* **L***[B'C'] y será igual a ella. Así, el triángulo completo* **T***[ABC] coincide con el triángulo* **T'***[A'B'C'] y será igual a éste. Los ángulos restantes también coincidirán con los ángulos restantes y serán iguales a ellos* (Euclides, 2000, p. 206).

De la igualdad **L**[BC] = **L**[B'C'], a la que ha llegado a través de esta experiencia de superponer los dos triángulos, Euclides concluye la igualdad **T**[ABC] = **T'**[A'B'C']. Todo el argumento parece descansar así sobre la legitimidad de la operación geométrica que permite llevar a un triángulo a ser *aplicado* sobre otro. Habíamos mencionado que Euclides no ha dado

8 Debemos señalar que el término empleado por el autor de los Elementos en esta proposición, «Ἐφαρμοζομένου - Epharmozomenou», se refiere a la voz pasiva «εφαρμοζεσθα - epharmozesthai», lo que hace referencia a una transformación geométrica –no definida ni introducida previamente– que no supone necesariamente la igualdad del triángulo **T** que "es aplicado" sobre el triángulo **T'**.

ningún postulado[9] que justifique la aplicación de una figura sobre la otra. Previo a la proposición 4, el autor de los *Elementos* solo ha introducido un procedimiento, a través de las primeras tres proposiciones, para poder *aplicar* un segmento de recta sobre otro; el procedimiento consiste, esquemáticamente, en lo siguiente:

1. Dado un segmento de recta **L**[AB] y un punto C fuera de él, es posible colocar este segmento de recta en el punto C. Esto significa que es posible trazar un segmento **L**[CD] que es igual, de acuerdo con el criterio del que se dispone, al segmento **L**[AB]. Este es el problema que se construye en la segunda proposición (I-2).[10]



Gráfica 2

2. Si se dispone de dos segmentos de recta distintos, lo que significa que uno de ellos es menor que el otro, **L**[AB] > **L**[CD], es posible quitar al segmento mayor una parte igual al segmento menor. Esta construcción está dada en la tercera proposición (I-3).

Gráfica 3

El interés que tenemos en la proposición (I-3), es que con ella es posible tomar, en un segmento de recta, una parte que sea igual a otro segmento de recta dado (y menor que el primer segmento). Vale decir que con esta tercera proposición se ha justificado plenamente el que si se tienen dos segmentos de recta, es posible *aplicar* uno sobre el otro, a condición de que no sea mayor que éste. En otras palabras, el sentido de esta construcción de aplicación no es otro sino el de que se puede encontrar un punto *E* en

9 Recordemos que son los tres primeros postulados, las *peticiones* o *demandas* (Αἰτήματα) sobre los cuales Euclides justifica las construcciones requeridas en la geometría, notablemente la construcción de un segmento de línea recta cuando se han dado los dos puntos que son sus extremos, la prolongación de un segmento de recta tanto como sea necesario y la posibilidad de trazar una circunferencia cuando se tiene un punto como centro de la misma y el segmento que da su radio.

10 Para esta construcción será necesario, como se sabe, utilizar un triángulo equilátero como figura auxiliar y cuya construcción ha sido dada en la primera proposición (I-1).

el segmento mayor **L**[AB], que será el extremo de un segmento **L**[AE] que hace parte de él, y que es igual al segmento menor **L**[CD].

Para llevar a cabo esta operación y poder encontrar el punto requerido en el segmento mayor, es necesario *colocar* un segmento de recta en un punto fuera de ella, en este caso colocar el segmento **L**[CD] en el punto *A*; lo que consiste, en estricto sentido, en poder trazar un segmento igual a este segmento dado. Cuando el autor de los *Elementos* busca *colocar* un segmento en un cierto sitio del plano –el sitio indicado por el punto dado–, ello no significa que el segmento dado se mueve o se desplaza sobre el plano para llegar a otro lugar; significa, tal y como lo muestra en la proposición I-2, que se puede trazar uno que le es igual. Esa experiencia que consiste en aplicar un segmento sobre otro está dada, primero, por una construcción que permite *trazar o construir* un segmento en otro punto del plano; pero esta construcción está basada, a su vez, en una relación de igualdad dada en las definiciones iniciales, y válida para los segmentos de recta:

> Def.: *Un círculo es una figura plana comprendida por una línea, tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí* (Euclides, 2000, p. 193).

Así, mientras las tres primeras proposiciones dan cuenta de la operación que permite colocar un segmento de recta sobre otro, la demostración de la cuarta proposición, que requiere aplicar un triángulo sobre otro, se presenta sin haber dado un procedimiento que permita aplicar una figura sobre otra mediante una construcción. Llama la atención el que Euclides acepte sin justificación alguna la posibilidad de mover y aplicar un triángulo sobre otro, mientras que ha dedicado, en cambio, las primeras proposiciones de su texto a justificar y dar cuenta de esta construcción para un segmento. Sin embargo, si el lector del texto euclidiano intenta realizar la experiencia de superponer el triángulo **T** sobre el triángulo **T′** mediante la construcción de un triángulo igual a **T** que se ajuste y coincida con **T′**, las razones que llevaron al autor de los *Elementos* a seguir el camino elegido aparecen claramente. Al intentar la construcción de un triángulo igual a **T** y que se encuentre superpuesto a **T′**, vemos que es la igualdad de los ángulos *a*[BAC] = *a*[B′A′C′] la que presenta ahora la mayor dificultad. En efecto, no se trata solo de aplicar un par de segmentos sobre otro par de segmentos, sino de aplicar al mismo tiempo un ángulo sobre otro, y no será sino varias proposiciones más adelante cuando Euclides logre, en la proposición I-23, *construir* (κατασκευη - kataskeuê) un ángulo igual a un ángulo dado, cuando se tiene un segmento y se ha señalado también uno de los extremos en el que se debe de construir dicho ángulo.[11] Esto significa que dado un

11 Queremos subrayar el hecho de que si bien las proposiciones I-2 y I-23 permiten llevar a cabo las construcciones análogas para un segmento y para un ángulo, el autor de los *Elementos*

ángulo *a*[BAC] y un segmento **L**[A′B′], se puede trazar un segmento **L**[A′C′] de modo que el ángulo *a*[B′A′C′] que forme este segmento con el segmento dado sea igual al ángulo dado.

Gráfica 4

Parece necesario disponer primero de la posibilidad de construir un ángulo *a*[B′A′C′] igual al ángulo *a*[BAC] del triángulo **T**[ABC] para poder garantizar así que los lados **L**[AB] y **L**[AC], y el ángulo que forman en este triángulo, se han *aplicado* sobre los lados y el ángulo respectivos del triángulo **T**[A′B′C′]. Podríamos comprender así que "mover un triángulo" para superponerlo sobre otro es, en el marco delineado por los postulados y las primeras proposiciones de los *Elementos*, una expresión coloquial para señalar que lo que se ha hecho ha sido *construir* a partir de un triángulo **T**[ABC] un nuevo triángulo mediante el siguiente procedimiento:

C1: Se construye un segmento **L**[A′B′], igual al segmento **L**[AB], en un punto dado A′ (proposición I-2). Se construye con este segmento **L**[A′B′] y en el punto A′ un ángulo *a*[B′A′C′] igual al ángulo *a*[BAC] (proposición I-23). Sobre el segmento trazado para construir el ángulo *a*[B′A′C′], se toma un punto C′ de modo que el segmento **L**[A′C′] sea igual al segmento **L**[AC] (proposición I-3). Finalmente se traza el segmento **L**[B′C′] a partir de los puntos B′ y C′ (postulado 1).

De este modo el teorema **T**(LAL) podría interpretarse como sigue:

> *El triángulo* **T***[A′B′C′] construido a través del procedimiento descrito por C1 es igual al triángulo dado* **T***[ABC].*

Pero este camino no solo presenta el inconveniente de tener que recurrir a una proposición no demostrada aún para el lector del texto euclidiano; lo más grave es que, por esta vía, caerá inevitablemente en un círculo vicioso, ya que la proposición I-23, en donde se lleva a cabo la construcción de un ángulo igual a un ángulo dado, requiere de la igualdad de dos triángulos a partir del criterio dado por *T(LAL)*.

habla en el primer caso de *colocar* (θέσθαι) el segmento en otro punto; en el segundo caso, señala que se va a **construir** (συστήσασθαι) un ángulo igual a un ángulo dado.

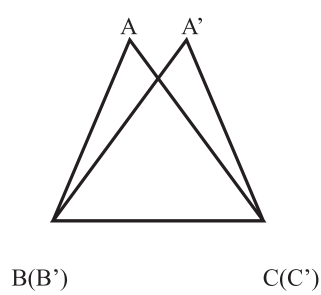
En efecto, la construcción propuesta por Euclides para la proposición I-23 consta de los siguientes pasos:

a. Trazar el segmento **L**[BC] a partir de los extremos B y C, para construir así el triángulo **T**[ABC].

b. Construir un triángulo **T**[A′B′C′] de modo que sus lados **L**[A′B′], **L**[A′C′] y **L**[B′C′] sean iguales a los segmentos dados **L**[AB], **L**[AC] y **L**[BC].

El primer paso requiere solo del primer postulado para llevarse a cabo. El segundo, requiere primero de la posibilidad de trazar un triángulo dados sus tres lados (proposición 22), pero, sobre todo, el poder asegurar que el triángulo así construido es igual al triángulo cuyos lados son los segmentos **L**[AB], **L**[AC] y **L**[BC], es decir el triángulo **T**[ABC]. Gracias a esta igualdad se podrá decir que el ángulo *a*[B′A′C′] se ha construido igual al ángulo *a*[BAC]. Esto nos permite analizar el segundo caso, en el que Euclides recurre a esta experiencia de mover y aplicar un triángulo sobre otro: nos referimos a la proposición I-8, en la cual, parafraseando el estilo que dimos a la primera versión de *T(LAL)* se demuestra que un *triángulo está determinado de manera única por sus tres lados*.

Esto significa que dados dos triángulos **T = T**[ABC] y **T′ = T**[A′B′C′], cuyos lados son iguales dos a dos, se tendrá que ellos son iguales. La prueba de la coincidencia de estos dos triángulos se lleva a cabo por Euclides de la misma forma en la que llevó a cabo la prueba de *T(LAL)*, es decir, que en la construcción (κατασκευη - kataskeuê) de esta proposición, solo se establece que el triángulo **T** se aplica sobre **T′**. Se debe subrayar, sin embargo, que ahora Euclides parece más prudente con las conclusiones que extrae de esta experiencia, muy probablemente porque en este momento ya dispone de más proposiciones para echar mano de ellas; sobre todo, dispone de *T(LAL)*, lo que le permite no forzar al lector a concluir lo que la experiencia no permite concluir. Euclides establece simplemente que después de aplicar **T** sobre **T′** ellos deberán coincidir, ya que de otro modo se tendría la siguiente situación:



Gráfica 5

Es decir que al aplicar el segmento **L**[BC] al segmento **L**[B′C′], de modo que sus extremos coincidan, se tendría que sobre un mismo segmento –y del mismo lado– se encontrarían en dos puntos distintos *A* y *A′*, dos pares de segmentos iguales dos a dos: **L**[AB] = **L**[A′B′] y **L**[AC] = **L**[A′C′]. Pero la imposibilidad de que una figura así exista ha sido establecida por el autor de los *Elementos* justo en la proposición anterior, I-7. Esto señala que la experiencia, que en estricto sentido es exactamente la misma que en *T(LAL)*, no puede ella sola mostrar la igualdad, la coincidencia de **T** con **T′**; más bien esta experiencia nos lleva a concebir una figura cuya posible existencia ha sido desechada en la proposición anterior. Este "ajuste" lleva a Euclides a concluir que la verdadera lectura de la experiencia no puede ser otra que la coincidencia de los dos triángulos.

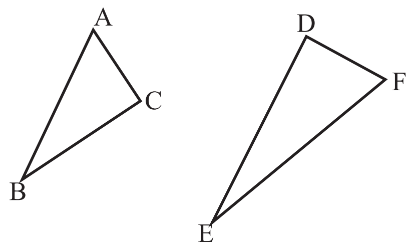
No entraremos en los detalles de la demostración de la proposición I-7; marcaremos por lo pronto el hecho de que ella depende directamente de I-5 –la que analizaremos más adelante– y ésta, a su vez, de I-4, es decir de *T(LAL)*. Con ello podemos concluir el singular hecho de que el correctivo de la experiencia de la superposición de dos figuras, llevada a cabo en I-8, está dado precisamente por la superposición de dos figuras llevada realizada en la proposición I-4.

Pero este hecho muestra la inconsistencia que subyace a la idea de querer justificar por el camino descrito la construcción (κατασκευη - kataskeuê) presentada en la proposición I-4: para poder sustituir mediante una construcción la experiencia de superponer los dos triángulos, era necesario primero poder construir un ángulo igual a un ángulo dado; esta construcción es posible si se puede realizar un triángulo igual a otro triángulo dado; pero esta igualdad buscada es precisamente la igualdad que se quiere resolver. Esto significa que el primer teorema de los *Elementos* nos obliga a aceptar, para su demostración, una singular *experiencia* que consiste en mover *imaginariamente* un triángulo para montarlo sobre otro –experiencia para la cual no se han dado los medios propios del discurso geométrico que permitan concebirla– ya que al intentar llevar a cabo la *construcción geométrica* necesaria para sustituir a dicho experimento se debe recurrir a una proposición que se basa precisamente en el teorema que se quiere demostrar. En otras palabras, sería necesario aceptar como ya demostrado lo que se quiere demostrar.

Ante este dilema el autor de los *Elementos* ha tomado partido por una experiencia imaginaria que no tiene justificación, lo que nos puede llevar a pensar en la existencia de una laguna inadmisible en un texto considerado por más de veinte siglos como el ejemplo más decantado del rigor en geometría.

Segunda experiencia: el ancla de la figura y la comparación de las magnitudes

Hasta ahora hemos señalado cuáles son, a nuestro juicio, las dificultades a las que se enfrenta el lector del texto euclidiano para llevar adelante el *experimento pensado* que se sugiere en la demostración del teorema *T(LAL)*. Una vez señaladas estas dificultades, dirijamos nuestra atención ahora a una conclusión que se extrae de esta experiencia. Para ello consideremos dos triángulos, **T**[ABC] y **T**[DEF], en los que nuevamente se tienen las igualdades **L**[AB] = **L**[DE] y **L**[AC] = **L**[DF], pero en cambio se tiene que el ángulo *a*[BAC] es distinto del ángulo *a*[EDF].



Gráfica 6

Si en este caso se *aplica* el segmento **L**[AB] sobre el segmento **L**[DE], y también el segmento **L**[AC] sobre el segmento **L**[DF], a la manera de la proposición I-3, se tendrá que en ambos casos los segmentos coincidirán –resultado esperado en nuestra experiencia– dadas las dos igualdades asumidas **L**[AB] = **L**[DE] y **L**[AC] = **L**[DF]. Pero llegado a este punto, resulta sorprendente el que en este caso sea posible también retomar a la letra la conclusión que Euclides extrae de la superposición de los dos triángulos, ya que podemos afirmar igualmente que:

> *el lado L[AB] coincide con el lado* **L***[DE], y* **L***[AC] también coincidirá con el lado* **L***[DF] en virtud de que son iguales dos a dos y de que* **L***[AB] y* **L***[AC] se han aplicados sobre* **L***[DE] y* **L***[DF] respectivamente; por lo tanto, el punto C coincidirá con el punto F, y el punto B con el punto E.*

Así, a la manera del autor de los *Elementos*, se podría concluir, cosa que violenta nuestra intuición, que de la coincidencia de los puntos C con F y B con E, se tiene que la base **L**[BC] de **T**[ABC] coincide con la base **L**[EF] de **T**[DEF] y será, por lo tanto, igual a ella.[12]

12 Recordemos que en la demostración (αποσειξις) de *T(LAL)* la igualdad de las bases **L**[BC] y **L**[B'C'] se apoya en la siguiente aclaración: *Si cuando B coincide con B' y C con C', la base*

La resistencia a usar la coincidencia de los puntos para concluir la igualdad de los lados **L**[BC] y **L**[EF] nos permite ver claramente que la igualdad de los lados **L**[BC] y **L**[B′C′] en la prueba euclidiana de *T(LAL)* no se deriva de la coincidencia de los extremos de estos dos segmentos –B con B′ y C con C′– sino de la igualdad del ángulo *a*[BAC] con el ángulo *a*[B′A′C′], igualdad que en el caso de los triángulos **T**[ABC] y **T**[DEF] no se cumple. Resulta paradójico el que Euclides haya utilizado un argumento que deriva de las relación de *incidencia*, que vincula dos tipos de objetos geométricos –los puntos y las líneas– al afirmar que es solo una línea la que puede pasar por dos puntos,[13] cuando el resultado buscado deriva de otro tipo de relación, la que permite comparar en magnitud líneas y ángulos. El argumento utilizado por Euclides llama tanto más nuestra atención, cuanto que a la par de la experiencia por la que nos ha llevado, surge otra experiencia imaginaria que nos permite formular como hipótesis el que la magnitud del ángulo *a*[BAC] está relacionada directamente con la magnitud del lado **L**[BC] que lo subtiende.

Ello nos lleva a proponer una nueva versión del teorema *T(LAL)*:

> I. *Si dos triángulos* **T***[ABC] y* **T***[A′B′C′] son tales que las igualdades* **L***[AB] =* **L***[A′B′] y* **L***[AC] =* **L***[A′C′] se satisfacen, entonces de la igualdad a[BAC] = a[B′C′] se concluye la igualdad* **L***[BC] =* **L***[B′C′] y de ahí la igualdad de los triángulos* **T***[ABC] y* **T***[A′B′C′].¬*

Lo interesante de esta formulación para *T(LAL)* es que ella nos permite descubrir un vínculo estrecho entre este teorema y las siguientes proposiciones:

> II. *En todo triángulo el lado mayor subtiende al ángulo mayor y al ángulo mayor lo subtiende el lado mayor.*

> III. *Si dos triángulos* **T***[ABC] y* **T***[DEF] son tales que las igualdades* **L***[AB] =* **L***[DE] y* **L***[AC] =* **L***[DF] se satisfacen, entonces de la desigualdad a[BAC] < a[EDF] se concluye la desigualdad* **L***[BC] <* **L***[EF] y de ahí la desigualdad de los triángulos* **T***[ABC] y* **T***[A′B′C′].¬*

Hemos señalado que el autor de los *Elementos* invita al lector a obtener de la coincidencia de los extremos de los lados superpuestos, con ayuda

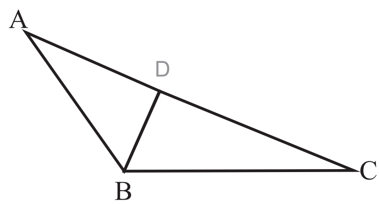
---

L*[BC] no coincide con la base* **L***[B′C′], dos líneas encerrarán un espacio, lo que es imposible. Por lo tanto la base* **L***[BC] coincide con la base* **L***[B′C′]*. Sabemos que la autenticidad de esta aclaración ha sido puesta en duda por algunos comentadores de la obra euclidiana; lo que parece indiscutible es que está en el origen de la Noción Común 9.

13 Claramente, aunque el texto euclidiano no lo mencione, es posible establecer la misma propiedad con la propiedad dual: es sólo un punto, el que se encuentra simultáneamente en dos líneas.

de un argumento acerca del número de rectas que pueden pasar por dos puntos distintos, la igualdad –coincidencia– del tercer lado; veamos ahora cómo procede para la prueba de las proposiciones (II) y (III). Notemos que estas dos últimas proposiciones son las I-18 y I-19 (II), y I-24 (III), lo que muestra que mientras que la posibilidad de formularlas a manera de conjetura es inmediata tras una ligera variación en el experimento imaginario, su demostración requiere del despliegue de una trama argumentativa mucho más compleja que la que se empleó en *T(LAL)*.

Analizaremos con cierto cuidado estas demostraciones, ya que en ellas veremos con toda claridad un segundo tipo de experiencia figural. Para la prueba de las proposiciones I-18 y I-19, nuestra proposición (II), Euclides considera primero un triángulo **T**[ABC] en el que el lado **L**[AC] > **L**[BC].



Gráfica 7

Sobre el segmento **L**[AC] toma un punto D, de tal manera que **L**[CD] = **L**[BC], a la manera de la proposición I-3, y traza (postulado 1) el segmento **L**[BD]. Ahora asegura que *a*[CBA] > *a*[CBD], y que este último ángulo es igual a *a*[CDB]. No nos ocuparemos, por lo pronto, de esta última igualdad demostrada por Euclides en la proposición I-5 y que analizaremos más adelante –de la cual, por cierto, el lector habrá apreciado ya que se encuentra en cierta armonía con la proposición I-18 que nos ocupa en este momento– y nos concentraremos en la primera desigualdad. Pero antes de ello concluiremos nuestra presentación del argumento euclidiano. El ángulo *a*[CDB] es mayor que el ángulo *a*[BAC], desigualdad demostrada en la proposición I-16, lo que termina la demostración, ya que *a*[CBA] > *a*[CBD] = *a*[CDB] > *a*[BAC].[14]

La prueba de la desigualdad *a*[CDB] > *a*[BAC], al igual que la prueba de la desigualdad *a*[CBA] > *a*[CBD], se obtiene a partir de un nuevo tipo de experiencia con las figuras, en la cual lo que la figura muestra constituye el

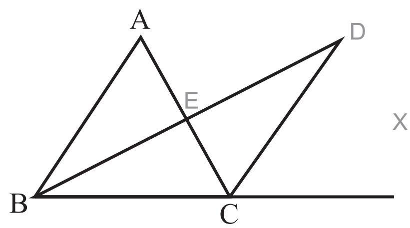
14 Con base en el mismo argumento, es posible probar que la relación inversa se cumple: si *a*[CBA] > *a*[BAC] entonces **L**[AC] > **L**[BC]. Si esta última relación no se cumple, entonces **L**[AC] ≤ **L**[BC]. Si **L**[AC] = **L**[BC] entonces, por la proposición I-5, se tendría que *a*[CBA] = *a*[BAC], lo que contradice la hipótesis asumida. Si **L**[A,C] < **L**[BC] se tendría, por lo que se acaba de probar, que *a*[CBA] < *a*[BAC], lo que contradice nuevamente la hipótesis asumida.

fundamento para lo que sobre ella se demuestra. De hecho, ninguna de las dos desigualdades se deduce a partir de un postulado o de algún teorema previo, sino simplemente a partir de lo que la figura muestra. Es fácil observar que en el caso de la desigualdad *a*[CBA] > *a*[CBD], sólo la disposición del segmento **L**[BD] en la figura permite concluir la desigualdad de los dos ángulos. Claro que nuevamente Euclides no procede en el vacío y se apoya en otra noción común, la número 5, que asegura:

N.C. 5. El todo es mayor que la parte.

Es la disposición de este segmento, con el cual se forma el ángulo *a*[CBD], la que permite decir que éste es una parte del ángulo *a*[CBA]. Esta proposición I-18 forma parte de un ciclo de proposiciones, iniciado en I-16 y del que también forma parte la proposición I-24, en las que las figuras muestran –y demuestran, para el autor de los *Elementos*– ciertas relaciones entre magnitudes que no se habían obtenido ni planteado previamente.

Veamos cómo la demostración de I-16, que asegura que en todo triángulo el ángulo externo es mayor que cualquiera de los ángulos internos opuestos, procede de la misma forma. Para este enunciado (προτασις - protasis), tomemos la exposición (εκθεσις - ekthesis) y especificación (διορισμος - diorismos) siguientes: si **T**[ABC] es un triángulo cuyo lado **L**[BC] se ha prolongado (postulado 2) hasta el punto X, el ángulo externo *a*[ACX] será mayor que cualquiera de los dos ángulos internos *a*[BAC] y *a*[CBA].



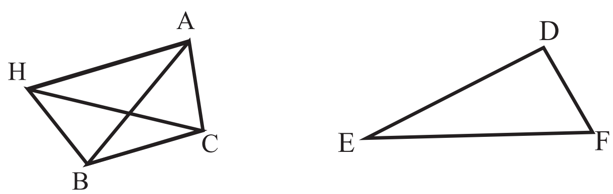
Gráfica 8

Para dar paso a la construcción (κατασκευη - kataskeuê), Euclides toma el punto medio E del segmento **L**[AC] –construcción hecha en la proposición I-10– y el segmento **L**[BE] se prolonga hasta D, de modo que **L**[BE] = **L**[ED] y traza el segmento **L**[CD]. Ahora, del teorema *T(LAL)*, se concluye la igualdad de los triángulos **T**[ABE] y **T**[CDE] en virtud de que el ángulo *a*[CED] es igual al ángulo *a*[BEA][15] y, por el mismo teorema *T(LAL)*, se tiene también que el ángulo *a*[ECD] es igual al ángulo *a*[EAB]. Nuevamente es la disposi-

15 Debido a la igualdad de los ángulos opuestos por el vértice, demostrada por Euclides en la proposición I-15.

ción del segmento **L**[CD] en la figura, la que permite concluir que el ángulo *a*[ECD] es menor que el ángulo *a*[ECX] por ser una parte de éste. El autor de los *Elementos* nos invita a ver en la figura una desigualdad entre magnitudes que no parece tener otra posible justificación. En esta proposición Euclides no impone a la figura una relación –de igualdad o desigualdad– entre magnitudes a partir del contenido mismo de la trama argumentativa, sino que extrae esta relación únicamente de la figura y, a partir de ella, esta relación se inscribe en esa trama.

Antes de extraer las conclusiones a las que nos lleva este nuevo tipo de experiencia con las figuras, experiencia en la cual es la figura la que nos permite determinar cuál de dos magnitudes es mayor y cuál es menor, y que hemos detectado en la prueba de las proposiciones I-18 y I-16, veamos la demostración de la proposición I-24, a fin de poder apreciar cómo es el mismo tipo de experiencia la que la sustenta y poder llevar a cabo una reflexión global sobre ésta. En este caso el autor de los *Elementos* se encuentra nuevamente frente a los dos triángulos de la figura 6 y, en virtud de que el ángulo *a*[BAC] es menor que el ángulo *a*[EDF], construye sobre el lado **L**[AC], y del lado en el que se encuentra el punto B, un ángulo *a*[HAC] que es igual al ángulo *a*[EDF]. No es extraño, así, que resulte lo siguiente:



Gráfica 9

El segmento **L**[AH] con el que se forma el ángulo *a*[HAC] = *a*[EDF], a partir de **L**[AC], deberá caer por fuera del ángulo *a*[BAC]; este hecho no ha sido plenamente sancionado por ninguna proposición previa, pero podemos aceptar que esta es la manera en la que la figura que se construye recupera y se pliega a la exigencia de que *a*[BAC] < *a*[EDF], de modo que de esta forma expresa lo que la noción común 5 establece. Una vez trazado el segmento **L**[AH], de modo que también sea igual en magnitud al segmento **L**[ED], se trazan los segmentos **L**[BH] y **L**[CH]. Se podrá reconocer que se ha trazado el triángulo **T**[HAC] a través del procedimiento **C1** –que describimos anteriormente– y que es por lo tanto igual al triángulo **T**[EDF], por lo que podemos concluir también que **L**[CH] = **L**[EF]. Esta igualdad permite afirmar, con base en la proposición I-5 ya mencionada, que *a*[AHB] = *a*[ABH]. Ahora es la figura quien nos permite concluir las siguientes relaciones entre ángulos: *a*[CBH] > *a*[ABH] y *a*[AHB] > *a*[CHB]. Con ellas llegamos así a que *a*[CBH] > *a*[CHB].

Los tres teoremas analizados, I-18, I-16 y I-24, tienen en su enunciado (προτασις - protasis) la propiedad singular de asegurar la desigualdad de dos magnitudes geométricas: se asegura que la relación de desigualdad entre dos lados de un triángulo implica la misma relación de desigualdad entre los ángulos que estos lados subtienden, o bien se asegura que el ángulo externo de un triángulo será mayor (desigual) que cualquiera de los ángulos internos opuestos; o, finalmente, que si en dos triángulos con dos lados iguales los ángulos formados por estos lados son desiguales, los lados que subtienden a estos ángulos serán también desiguales. Esta condición especial nos permite comprender el papel que en ellas desempeñan ahora las figuras, ya que no se les pedirá que muestren o constaten una igualdad, sino una desigualdad. Primero debemos señalar que, tanto para la relación de igualdad como para la desigualdad entre magnitudes, Euclides ha tenido que apoyarse en las nociones comunes –llamadas así debido a que se trata de nociones que son igualmente válidas para todas las magnitudes geométricas, o bien que son comunes a ellas–, pero el punto delicado es el de aclarar cómo estas nociones comunes deberán aportar el criterio que en ellas se busca en cada caso.

Ya hemos visto cómo el criterio de igualdad derivado de la noción común 4 parecía imponer ese tipo particular de experiencia con las figuras: la superposición; y no debemos olvidar que para el teorema *T(LAL)* resultó imposible sustituirla o dar cuenta de ella a partir de las construcciones de los segmentos y de los ángulos dadas en I-2 y I-23. Ahora aparece con claridad el hecho de que el papel de estas construcciones fue el de hacer posible también la superposición de magnitudes *distintas* –como lo establece claramente el enunciado de I-3– y que en virtud de la noción común 5 deberá presentar a una como parte de la otra. Si de antemano se ha establecido una relación de orden entre las magnitudes geométricas, entonces la figura deberá apegarse a ella, como lo hicimos notar en la gráfica 9 con el ángulo *a*[HAC] que es mayor, por hipótesis, que el ángulo *a*[BAC]. Pero en el caso de las tres proposiciones que nos ocupan, el orden de magnitud entre los ángulos se extrae de la figura misma. En el caso de la proposición I-16 vemos cómo este mecanismo funciona claramente: se busca demostrar que el ángulo interno –y opuesto– *a*[BAC] es menor que el ángulo externo *a*[ACX] (gráfica 8); para ello se lleva a cabo una construcción que no es sino la superposición del primero sobre el segundo para constatar –diríamos *experimentalmente*– que en efecto es menor por ser una *parte* de él. Claramente esta experiencia no puede ser la mera construcción del ángulo interno *a*[BAC] sobre el lado **L**[AC] –y del lado en el que se encuentra el punto X– pues hay dos problemas que lo impiden; el primero, obvio, es que nos encontramos en la proposición I-16 y la construcción del ángulo igual a un ángulo dado se dará hasta la proposición I-23; el segundo, más directamente ligado a nuestro tema, es que de llevar a cabo esta construcción, Euclides no dispone de ningún medio para poder dirimir si el segmento **L**[CD], con el que este ángulo se formaría, cae dentro o fuera del ángulo externo *a*[ACX]. Por ello se ve obligado a invertir el problema y llevar a cabo la construcción descrita, en la cual la figura presenta el ángulo *a*[ACD] con la doble propiedad de ser una parte del ángulo *a*[ACX] –por lo tanto, menor que éste– y también la de ser igual al ángulo *a*[BAC]. La desigualdad que se quiere demostrar en el teorema I-16 es extraída de la primera de estas dos propiedades, y es claro que en este caso la figura predetermina la relación y fija así su papel con el cuerpo teórico en el que se inscribe.

Hemos visto cómo las tres proposiciones analizadas nos permiten apreciar un nuevo papel de las figuras, en las que ahora son ellas quienes aportan la verificación de lo que se afirma. Es claro que las figuras[16] presentadas en los *Elementos* deben leerse en dos momentos: primero, la atención debe concentrarse viéndolas como la exposición (εκθεσις - ekthesis) y la especificación (διορισμος - diorismos) de la proposición; en este caso la figura queda sujeta a unas condiciones iniciales. En un segundo momento, se añaden a la figura las construcciones geométricas necesarias para alcanzar la demostración de la proposición; esto es lo que en ella corresponde a la construcción (κατασκευη - kataskeuê). Mientras que el primer momento no es sino la representación de lo que el enunciado (προτασις - protasis) establece y no parece requerir de más justificación, el segundo momento está siempre basado en los postulados –que deben verse así como cláusulas constructivas– y en las proposiciones que tienen el fin de proporcionar una construcción.[17] Así, en la proposición I-16, la figura correspondiente (gráfica 8) consta, en el momento de la exposición (εκθεσις - ekthesis) y de la especificación (διορισμος - diorismos), únicamente del triángulo **T**[ABC], en el cual el lado **L**[BC] se ha prolongado hasta el punto X; ella presenta de este modo un triángulo y un ángulo externo *a*[ACX] que, se asegura, será mayor que los ángulos internos *a*[BAC] y *a*[ABC]. El segmento **L**[BD] –que pasa por el punto E– y el segmento **L**[CD], así como el triángulo **T**[CDE], son colocados ahí por la construcción (κατασκευη - kataskeuê).

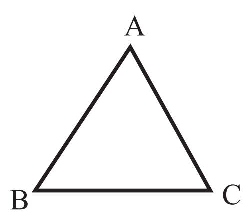
16 Desde luego nos referimos únicamente a las figuras que muy atinadamente J. L. Gardies (1997) ha llamado “figuras verdaderas”, en comparación con las “figuras falsas”, cómo la expuesta en la gráfica 5. Para más detallada explicación de estas nociones remitimos al lector a la obra *L’organisation des mathématiques grecques de Théétete a Archimede*.

17 Nos referimos a las proposiciones que son conocidas como *problemas* entre las que se encuentran justamente las proposición I-23 que hemos analizado.

A partir de estos dos momentos de la figura, el *canon* euclidiano consiste en hacer que sea en la prueba (αποδειξις - apodeixis) en donde se establezcan las propiedades y relaciones de lo que en la construcción se añadió a la figura original, ya que de esto depende el que aquello que se afirmó en la especificación (διορισμος - diorismos), quede así plenamente demostrado. Pero el papel que desempeñan las figuras en las tres proposiciones que hemos analizado no se ajusta plenamente a este *canon*, ya que en ellas las figuras devienen un elemento constitutivo de la prueba misma. Lo que se concluye en la prueba (αποδειξις - apodeixis) no se establece a propósito de las figuras sino a partir de ellas, exigiendo por lo tanto otro tipo de papel de la figura, en donde no es ella la que se ancla a condiciones de partida, sino son las relaciones finales las que se anclan a la figura. La conclusión (συμπερασμα - symperasma) depende así de lo que la figura ha logrado introducir en la prueba.

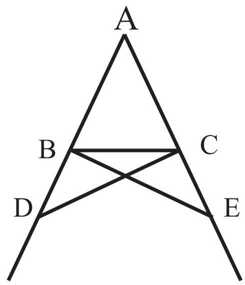
Para comprender este punto con mayor claridad, veamos la prueba de la proposición I-5, de la que ya hemos hablado, para constatar que en ella la figura se ajusta plenamente al *canon* descrito, *canon* del cual se alejan nuestras tres proposiciones analizadas. A manera de contrapunto tenemos ahora una proposición en la cual veremos que el papel de las figuras es el de aceptar en cada paso lo que el enunciado, la construcción y la prueba le llevan a aceptar. La figura se sujeta a relaciones que provienen de esos tres componentes.

En la proposición I-5 el autor de los *Elementos* tiene que demostrar que en un triángulo isósceles los ángulos subtendidos por los lados iguales, son iguales. La figura que *expone* esta proposición es simplemente la de un triángulo isósceles y en ella se *determina* también lo que se debe demostrar: si en el triángulo **T**[ABC] se tiene que los lados **L**[AB] y **L**[AC] son iguales, entonces los ángulos *a*[ABC] y *a*[ACB] también son iguales.



Gráfica 10

Una vez completadas estas dos primeras etapas, viene el momento de la *construcción* de las condiciones auxiliares y, con ellas, la figura se transforma del modo siguiente:



Gráfica 11

En donde se han prolongado los segmentos **L**[AB] y **L**[AC] y se ha tomado un punto D sobre la prolongación de **L**[AB], para encontrar después sobre la prolongación de **L**[AC] un punto E, tal que **L**[AE] sea igual a **L**[AD]. Vemos que son los postulados y las primeras proposiciones quienes permiten justificar plenamente lo que hasta aquí se ha hecho, y podemos decir que son ellos, como parte de la trama argumentativa de esta proposición, los que nos permiten *ver* las igualdades de estos segmentos en la figura. La figura queda anclada a los postulados y a las primeras proposiciones, y de ellos se derivan las conclusiones que a continuación se señalan. A partir de la construcción mencionada anteriormente, se puede concluir, de acuerdo con el teorema *T(LAL)*, que **T**[ABE] = **T**[ACD] ya que las condiciones iniciales de la proposición han establecido las siguientes igualdades –las mismas que la figura asume– **L**[AB] = **L**[AC] y **L**[AE] = **L**[AD], que son los lados que en estos dos triángulos son iguales dos a dos y que forman el mismo ángulo *a*[BAC]. La igualdad de estos dos triángulos permite concluir la igualdad de los segmentos **L**[BE] y **L**[CD] que la figura asume nuevamente. Ahora entra en escena una nueva noción común, la 3, que asegura:

N.C. 3. Si iguales se quitan a iguales, los residuos son iguales.

Con esta noción común se puede asegurar que **L**[BD] = **L**[CE]; de esta igualdad y la de los lados **L**[BE] y **L**[CD], junto con la de los ángulos *a*[AEB] y *a*[ADC] –que se sigue de la igualdad de los triángulos **T**[ABE] = **T**[ACD]–, se tiene la igualdad de los triángulos **T**[BCD] = **T**[BCE]. De esta última igualdad se obtiene, a su vez, la igualdad de los ángulos *a*[CBE] = *a*[BCD], a partir de la cual, mediante una nueva aplicación de la misma noción común, se obtiene finalmente la igualdad que se quería demostrar: *a*[ABC] = *a*[ACB].

Podemos apreciar así cómo todas las igualdades entre triángulos, segmentos y ángulos que presenta esta segunda figura –la que, a partir de la que expone y determina la proposición, incorpora los trazos de la construcción–

le son impuestos por el texto que despliega el autor en su demostración. Ninguna de ellas se deriva directamente de la figura.

Un caso completamente distinto, lo señalamos en su momento, se presenta con las proposiciones I-16, I-18 y I-24 que analizamos previamente; en ellas la figura impone al texto una relación de desigualdad entre algunas de las magnitudes geométricas involucradas y, a partir de ello, se sigue la demostración de las proposiciones. Si se retornan la exposición (εκθεσις - ekthesis) y la construcción (κατασκευη - kataskeuê) necesarias para la prueba de I-16, se podrá constatar que en el momento de evidenciar que el ángulo *a*[ACD] es igual al ángulo *a*[BAC] y menor que el ángulo *a*[ACX], la primera igualdad se extrae del teorema *T(LAL)* y es impuesta a la figura, pero la segunda desigualdad es impuesta por la figura e introducida así a la prueba; solo entonces la *conclusión* se sigue.[18]

Es este hecho el que coloca a las figuras involucradas en estas proposiciones en el papel de aportar, a la manera de un dato experimental, las relaciones entre magnitudes que devienen esenciales en la prueba proporcionada por el autor de los *Elementos* para ellas. Podemos decir que sin este nuevo papel no es posible alcanzar la prueba que se busca.

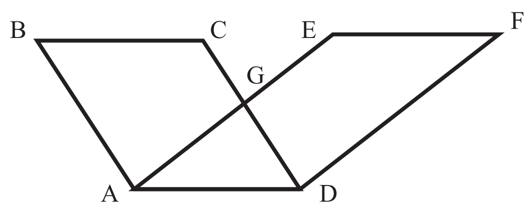
Existe una interesante –y aparentemente obvia– consecuencia de la proposición I-16, que es presentada por el autor de los *Elementos* en la proposición que afirma que en todo triángulo dos ángulos cualesquiera siempre son menores que dos ángulos rectos. Desde luego que son obligados dos tipos de comentario acerca de esta proposición I-17. El primero se refiere al hecho de que ella parece anunciar al teorema sobre la suma de los ángulos internos del triángulo –proposición I-32– y por ende queda pendiente su relación con el postulado 5 o con su contrapuesta. Sin embargo, dejaremos de lado este tipo de comentario en este trabajo y nos concentraremos en el segundo tipo, que refiere a la idea subyacente y que sugiere que los ángulos se pueden *sumar* o *añadir* unos a otros. Es claro que no puede haber otra posible interpretación para la afirmación de que cualesquiera dos ángulos internos de un triángulo *son menores que dos rectos*, ya que con ella el lector interpreta que la **suma** de dos ángulos internos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos. Hay dos condiciones que deben de satisfacerse para poder dar sentido pleno a esta afirmación: la primera, es la que fija el patrón de comparación, es decir, este valor que es el de "dos ángulos rectos". A partir de lo que Euclides ha demostrado en la proposición I-13, se

18 Se habrá notado que en todas ellas la figura impone una relación de desigualdad entre ángulos, pero se podrá revisar con esta misma óptica la demostración que presenta Euclides en su proposición III-2 y en la cual se podrá observar cómo es, en ese caso, la figura la que impone una relación de desigualdad entre segmentos de recta.

puede asegurar que los ángulos *a*[ACB] y *a*[ACX] en la gráfica 8 son iguales a (suman) dos ángulos rectos; la proposición se sigue inmediatamente de este hecho si en lugar del ángulo externo a[ACX] se toma cualquiera de los otros dos ángulos internos. Pero se debe observar que la suma de dos ángulos se entiende, por ahora, solo bajo la hipótesis de que los ángulos que se suman se encuentran uno junto al otro, a fin de poder dar sentido geométrico a esta operación de adición de ángulos. Por ello, no podemos considerar como legitimada plenamente esta operación de adición entre ángulos sino hasta la proposición I-23 con la cual, al tomar dos ángulos –sin imponer en ellos la condición de que tengan un lado común– es posible llevarlos precisamente a esta situación. Con esta observación se puede comprender claramente que el sentido geométrico de la suma de segmentos ha quedado plenamente establecido desde la proposición I-3.

Pero el paso más delicado dado por Euclides, es aquel en que se refiere a la suma de figuras rectilíneas. Esto nos obliga a hacer una precisión a propósito del lenguaje que utilizaremos en adelante, ya que hasta ahora no ha habido ninguna ambigüedad con el término "figura". En adelante aparecerá un nuevo uso de este término, sin que ello suponga el abandono del uso anterior. Cuando nos refiramos a las figuras rectilíneas, entenderemos con ello un dominio o región. Una figura (Σχημα) rectilínea es concebida como un *dominio* que se suma a otro, dando lugar a una nueva figura rectilínea, que se concibe como la suma de estos dos dominios. Así, las operaciones aditivas entre estas magnitudes están supeditadas a la posibilidad de operar con las figuras (Σχημα) rectilíneas que las expresan. El colocar "uno junto al otro" es el resultado de operar con ellas, pero la acción que lleva a ese resultado consolida una operación con magnitudes. A falta del término "rectilínea" nos referiremos, como hasta ahora, a las figuras en las que claramente se ven involucradas magnitudes geométricas, pero que no han sido concebidas ellas mismas como magnitudes.

En realidad, en las primeras 33 proposiciones de su obra Euclides no ha tratado ninguna otra figura (Σχημα) rectilínea aparte del triángulo; el círculo ha sido utilizado en algunas de ellas como figura auxiliar. Es en la proposición I-34 en la que Euclides introduce al paralelogramo como nueva figura (Σχημα) rectilínea y para la cual demuestra, en esta proposición, la igualdad de los lados y de los ángulos opuestos. Pero el estudio de estas nuevas magnitudes representadas por las figuras (Σχημα) rectilíneas requiere de llegar a establecer un nuevo criterio de igualdad para ellas, en el cual la condición de que éstas se ajusten una sobre la otra para poder ser consideradas como iguales, no es ya necesaria. Recordemos que si "sumar" es "colocar junto al otro", el criterio de ajustar para concluir la igualdad no da elementos para establecer la permanencia de la igualdad en este proceso operativo. Como se sabe, es la proposición I-35 la que demuestra que dos paralelogramos cuya base es la misma –proposición que de inmediato se generaliza al caso de dos paralelogramos cuyas bases son iguales– y que se encuentran entre las mismas paralelas, son iguales. Obviamente, bajo esta afirmación no se pretende que se llegue a hacer ver que son dos paralelogramos coincidentes, sino que se trata de dos figuras (Σχημα) rectilíneas que solo son parcialmente coincidentes entre sí. Si seguimos la prueba de esta proposición I-35 podemos observar claramente el punto al que nos referimos; Euclides considera dos paralelogramos con la misma base y que se encuentran entre las mismas paralelas, lo que significa, de acuerdo con la exposición (εκθεσις - ekthesis) de esta proposición, que en los paralelogramos **P**[AC] y **P**[AF] (gráfica 12), si el segmento **L**[BC] se prolonga en dirección del punto E, se encontrará que este y el punto F se encuentran en la línea así prolongada. Se asegura entonces que estos dos paralelogramos son iguales. Si ahora, a la figura que presenta esta exposición (εκθεσις - ekthesis) le añadimos los trazos marcados por la construcción (κατασκευη - kataskeuê) propuesta por Euclides, y que consiste simplemente en trazar el segmento **L**[CE], el papel de la figura cambia cualitativamente.



Gráfica 12

No se trata ahora de que la figura muestre que ciertas magnitudes son menores o iguales que otras, sino de introducir en la trama misma del argumento demostrativo el que los paralelogramos **P**[AC] y **P**[AF] son el resultado de sumar el triángulo **T**[AGD] y de restar el triángulo **T**[CEG] a los triángulos **T**[BAE] y **T**[CDF] respectivamente. La igualdad de los triángulos **T**[BAE] y **T**[CDF] se obtiene a partir del teorema *T(LAL)*, dada la igualdad de los lados **L**[AB] = **L**[CD] y **L**[AE] = **L**[DF], y la de los ángulos *a*[BAE] = *a*[CDF]. Estas últimas igualdades de los lados y los ángulos se desprenden de las propiedades demostradas para el paralelogramo en la proposición anterior y de la igualdad de los ángulos correspondientes formados por dos paralelas y una transversal, demostrada en la proposición I-29. Todas estas igualdades se derivan de las proposiciones anteriores y es la figura la que tiene que asumirlas. Pero es ahora la figura la que muestra que los paralelogramos **P**[AC] y **P**[AF] se obtienen mediante la suma y la resta de los triángulos iguales; es solo después de que esto ha sido aceptado en el argumento, que su igualdad se deriva de la noción común 3 y de la siguiente:

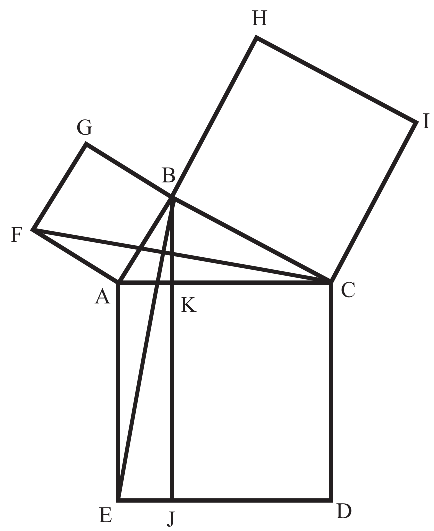
N.C. . Si se suman iguales a iguales, los totales son iguales.

Claramente las nociones comunes 2 y 3 comparten un mismo tipo de relación con las figuras, ya que al darles a ambas un sentido geométrico, se debe hablar de tres magnitudes geométricas, segmentos de recta, ángulos y figuras (Σχημα) rectilíneas, y se asegura que si se parte de magnitudes iguales a las cuales se *suman* o se sustraen magnitudes iguales, lo que se obtiene –los totales o los residuos– son iguales. Estas dos nociones comunes hablan así de una *regla* de la adición o de la sustracción, pero cuando se aplica a las anteriores magnitudes geométricas, es la figura la que puede dar cuenta de esta operación. Así, las figuras son portadoras de las operaciones que, aplicadas a magnitudes iguales, dan como resultado magnitudes iguales. Esto significa que el tránsito del criterio de igualdad a partir de la coincidencia –y cuya relación con las figuras ya fue analizado– al criterio de permanencia de la igualdad a partir de las operaciones con iguales, requiere que las operaciones geométricas de suma y resta se encuentren debidamente legitimadas en el argumento demostrativo; éste es el papel que desempeñan las figuras en el ciclo de proposiciones que nos ocupa ahora.

Desde luego que estas operaciones aparecen, siempre apoyadas en las nociones comunes, en muchas de las más célebres proposiciones de los *Elementos*; baste mencionar, por ejemplo, la proposición I-32, ya aludida anteriormente, y en la cual de manera explícita se habla de la suma de los tres ángulos internos de un triángulo. Se sabe que la prueba de esta proposición depende del postulado 5 y es importante notar que, de hecho, este mismo postulado requiere, antes de su posible utilización, el que se aclare el sentido de la *suma* de los ángulos ahí mencionada. Recordemos que este postulado asegura que dos líneas que sean atravesadas por una línea transversal se cortarán si se prolongan lo suficiente, siempre que ellas formen, con la transversal, ángulos internos que sean menos de dos rectos. Mucho se ha dicho a propósito de la aparición tardía de este postulado en el texto euclidiano –hasta la proposición I-29– y algunos autores sostienen que ello se debe a la resistencia del escritor de los *Elementos* a recurrir a él; nosotros creemos que este "retraso" del autor a recurrir a su postulado, obedece a la necesidad intelectual de aclarar dos problemas con este enunciado. El primero, que en modo alguno debe ser tenido como trivial, exige que se dé sentido al referente: el significado que tiene el ser *menor* que dos ángulos rectos. El segundo, se refiere claramente al sentido en el que habrá de comprenderse la *suma* de estos dos ángulos. Hemos hecho ver que estos problemas están íntimamente vinculados con el tema que nos ocupa, y claramente la aparición tardía de este postulado en la trama general del texto euclidiano está ligado al desarrollo que aquí hemos tratado de delinear y al papel que las figuras deben desempeñar en el cuerpo general del texto geométrico.

Pero creemos que el papel de las figuras en esta ley de adición y de sustracción es llevado a su forma más completa cuando, a través de ellas, se tiene que dar cuenta de las operaciones hechas sobre las figuras (Σχημα) rectilíneas. El ejemplo analizado de la proposición I-35 inicia este ciclo que terminará con la última proposición del libro 11, la XI-14. Dentro de este ciclo ocupa un lugar especial la prueba dada por el autor de los *Elementos* a la proposición I-47, conocida como el teorema de Pitágoras, que establece, a través de la figura, el algoritmo para la suma de cuadrados. Pasemos directamente a la exposición (εκθεσις - ekthesis) y la especificación (διορισμος - diorismos) de esta proposición: si se toma al triángulo rectángulo **T**[ABC], se trata de probar que el cuadrado **Q**[AD] es igual a la *suma* de los cuadrados **Q**[AG] y **Q**[BJ]. La construcción (κατασκευη - kataskeuê) procede ahora en dos tiempos: primero se traza simplemente el segmento **L**[BJ], como la perpendicular al segmento **L**[ED] desde el punto B. Con este simple trazo, el lector sabe de inmediato cuál será el curso de la demostración. En efecto, la figura establece una suma de figuras (Σχημα) rectilíneas: el cuadrado **Q**[AD] es la *suma* de los paralelogramos **P**[EK] y **P**[DK], y a partir de esta igualdad se tendrá que probar que los cuadrados **Q**[AG] y **Q**[BI] son iguales a estos dos paralelogramos. Para la prueba de la primera igualdad **Q**[AG] = **P**[EK] se trazan, –segundo momento de la construcción–, los segmentos **L**[EB] y **L**[FC], lo que hace que la prueba ahora sea, una vez más, obtenida a partir de *T(LAL)*. Los triángulos **T**[ABE] y **T**[AFC] son iguales por tener dos lados iguales, **L**[AE] = **L**[AC] y **L**[AB] = **L**[AF], y los ángulos formados por éstos, *a*[EAB] y *a*[CAF], son también iguales. Las igualdades entre los lados se desprenden directamente de la definición del cuadrado; la igualdad de los ángulos ya se obtiene, nueva intervención de la figura, para fijar una operación de magnitudes, debido a que ambos son iguales a la suma de un ángulo recto y el ángulo *a*[BAC]. Ahora es la simple aplicación de la proposición I-41 –que asegura que los paralelogramos duplican al triángulo que tiene la misma base y se encuentra entre las mismas paralelas– la que permite concluir la prueba. La prueba de la igualdad **Q**[BI] = **P**[DK] procede de manera totalmente análoga.

Como en los dos casos anteriores, podemos apreciar que el papel experimental de las figuras se inicia en el momento de la construcción (κατασκευη - kataskeuê), ya que es hasta entonces cuando devienen un instrumento necesario en la prueba. Hemos insistido en el hecho de que antes de la construcción, la figura solo despliega la exposición (εκθεσις - ekthesis) y la especificación (διορισμος - diorismos), es decir que solo asume y muestra lo que en el enunciado (προτασις - protasis) se ha establecido como existente –lo que establece un primer tipo de ancla–, a saber un cierto objeto geométrico, un triángulo o un paralelogramo, así como las propiedades que de él se predican. La construcción parece tener la finalidad de modificar la figura, al hacer aparecer nuevas figuras cuya existencia no se había establecido por el enunciado; tal es el caso de los triángulos **T**[ABE] y **T**[AFC], así como de los paralelogramos **P**[AK] y **P**[DK]. Que las relaciones que aparecen en estas figuras modificadas deban incluirse en la prueba de la proposición –lo que fija el segundo tipo de ancla– no debe sorprendemos, pues este hecho es el que justifica la necesidad y razón de ser de este momento de la proposición, codificado como la construcción (κατασκευη - kataskeuê). Pero lo que hemos querido resaltar, es que en los casos analizados ha sido necesario introducir en el argumento lo que la figura así modificada aporta, entendiendo con ello que las relaciones de igualdad o desigualdad que en ella se expresan no son susceptibles de ser justificadas al margen de ella.



Gráfica 13

Que en la figura sea posible mostrar todos los argumentos que se concatenan en la cadena deductiva de la prueba nos parece algo necesario para poder seguirla cabalmente. Pero hemos mostrado en estas tres experiencias cómo la figura aporta un elemento sin el cual el argumento deductivo se ve interrumpido; esta experiencia sobre la figura es necesaria, entonces, para poder dar el curso completo a la demostración misma. Queremos resaltar que en el caso de las desigualdades entre magnitudes –nuestra segunda experiencia– y en el de las operaciones geométricas –la tercera experiencia– una vez hechas estas aportaciones por la figura, el argumento se apoya en el teorema *T(LAL)* que, sustentado en la primera experiencia, se ha sedimentado y se ha integrado al conjunto de argumentos a los que legítimamente se puede recurrir. La primera experiencia analizada se presenta así como la experiencia original que apoya indirectamente a las otras dos.

Podemos así concluir que si se quisiera reconstruir el texto euclidiano para eliminar toda posible noción de experiencia figural, al menos en lo que se refiere a las tres experiencias que hemos señalado –y sin que ello signifique que es posible prescindir de las figuras– dos condiciones tendrían que cumplirse: partir de un principio que permita prescindir de la primera experiencia y asumir enseguida las modificaciones que esto conlleva para las otras dos. Este es, sin duda, el espíritu que anima el texto de David Hilbert (1899/1997), *Los Fundamentos de la Geometría*.[19] Dejaremos aquí la alusión a la obra de Hilbert, pero el lector que haya seguido nuestro argumento podrá encontrar, a partir de este comentario, una buena guía para dirigir la lectura de un texto que podemos considerar como el último de los grandes comentarios hechos a la obra de Euclides.

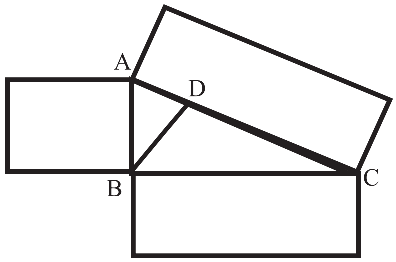
Reflexión final: figuras y proporciones

El propósito de caracterizar distintos tipos de experiencias con las figuras en la obra de Euclides, y con ello el intento de caracterizar la función de las figuras en la trama argumentativa de la geometría euclidiana no se agota con la exposición ya realizada, ya que percibimos cómo se abre un ciclo nuevo de reflexión cuando nos preguntamos por el papel de las figuras (y su experiencia) en el marco de la teoría de las proporciones. A manera de ejemplo veamos el tipo de reflexiones que se sugieren a partir de la lectura de la proposición VI-31:

> *Proposición 31: En los triángulos rectángulos, la figura (construida) a partir del lado que subtiende el ángulo recto es igual a las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de los lados que comprenden el ángulo recto.*

19 Nos referimos, desde luego, a los cambios que en su texto ha introducido Hilbert y entre los que destacan:

1. El teorema T(LAL) se establece como axioma –quinto axioma de congruencia– debido a la eliminación del método de transposición.
2. La prueba del teorema del ángulo externo difiere completamente de la prueba de Euclides, debido a que no recurre al principio de que el todo es mayor que la parte.
3. La teoría de las áreas de las figuras planas se modifica sustancialmente al reconocer que la igualdad establecida por Euclides corresponde únicamente a una operación de descomposición de las figuras, razón por la cual no acepta hablar de igualdad sino de equidescomponibilidad y equicomplementareidad.



Gráfica 14

En la demostración de esta proposición podemos observar que ahora no se privilegia ninguna figura rectilínea en particular y el énfasis se ha desplazado hacia la determinación de la dependencia de las relaciones entre las figuras respecto de las relaciones que se establecen entre sus lados. Si se compara el proceso de demostración de las proposiciones I-47 y VI-31, se notará que la permanencia de la relación de semejanza en la segunda desempeña el mismo papel que la relación de igualdad desempeña en la primera. En ambas tramas argumentativas la construcción (κατασκευη - kataskeuê) transforma el modo en el que la figura es presentada en un primer momento, a fin de poder dar cuenta de la adición de las magnitudes que ellas representan. Pero mientras que en la proposición I-47 la transformación consiste en "partir" en dos a la figura (cuadrado) construida sobre la hipotenusa para proceder a probar que cada una de estas dos partes es igual a la figura construida sobre cada uno de los otros dos lados del triángulo rectángulo; en el caso de la proposición VI-31, la construcción consiste en trazar simplemente el segmento **L**[BD] el cual, según lo muestra la figura, divide al triángulo rectángulo **T**[ABC] en dos triángulos que son semejantes a él mismo. A partir de este momento la prueba no depende simplemente del hecho que el punto D divida a la hipotenusa **L**[AC] en dos segmentos **L**[AD] y **L**[DC], sino de que cada uno de los lados del triángulo **T**[ABC] que forman al ángulo recto es la media proporcional de la hipotenusa **L**[AC], y cada uno de los segmentos en los que ésta queda dividida: **L**[AB] es la media proporcional de **L**[AC] y **L**[AD]; y **L**[BC] es la media proporcional de **L**[AC] y **L**[DC].

A partir de este momento, la figura representa no solo la *adición* de una serie de partes en las que ésta se pudo haber dividido, sino que es, sobre todo, portadora de una relación de proporcionalidad entre los lados y entre las figuras construidas sobre ellos, que el teorema se sigue: primero se tiene que **L**[AC]/**L**[AB] = **L**[AB]/**L**[AD], y por lo tanto, a partir de los *porismos*[20]

20 Como es bien sabido, el segundo *porismo* de la proposición VI-20 es una interpolación atribuida a Theón, pero es ciertamente hasta este momento que puede aceptarse completamente la afirmación.

de las proposiciones VI-19 y VI-20, se tiene que $\mathbf{L}[AD]/\mathbf{L}[AC] = \mathbf{F}_{AB}/\mathbf{F}_{AC}$; en donde $\mathbf{F}_{AC}$ y $\mathbf{F}_{AB}$ son las figuras (rectilíneas) construidas sobre los lados $\mathbf{L}[AC]$ y $\mathbf{L}[AB]$ respectivamente. De igual modo se tiene que $\mathbf{L}[DC]/\mathbf{L}[AC] = \mathbf{F}_{BC}/\mathbf{F}_{AC}$. Ahora la proposición VI¬-31 se sigue inmediatamente de una proposición relativa a la teoría de proporciones, la cual desempeña, en este caso, un papel análogo al que desempeñaron las nociones comunes en las experiencias figurales que analizamos anteriormente. Nos referimos a la proposición V-24:

> *Proposición: Si una primera magnitud guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y una quinta guarda con la segunda la misma razón que la sexta con la cuarta, la primera y la quinta, tomadas juntas (*συντεθὲν*), guardarán también la misma razón con la segunda que la tercera y la sexta con la cuarta.*

De esta proposición, se sigue que $(\mathbf{L}[AD] + \mathbf{L}[DC]/\mathbf{L}[AC]) = (\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BC}/\mathbf{F}_{AC})$, tomando las dos igualdades de razones obtenidas a partir de los *porismos*. Es decir que la razón de igualdad que se presenta entre los segmentos, será la misma que la que se presente entre las figuras.[21]

Ahora la proposición V-24 garantiza la permanencia de la relación de proporcionalidad bajo la adición de dos antecedentes con el mismo consecuente, tal y como las nociones comunes garantizaban la permanencia de la relación de igualdad bajo la adición de iguales. Pero es la figura la que permite asegurar que esta permanencia de la proporcionalidad no es otra cosa sino la permanencia de la relación de semejanza de las figuras bajo la adición.

Este pequeño ejemplo que hemos tratado nos permite adelantar que el papel de las figuras en una geometría cuyo objeto no sea ya la comparación entre las magnitudes geométricas, sino el estudio de la proporcionalidad y la semejanza, destina a la figura un papel cuyo aspecto *experimental* debe ser analizado.

Referencias bibliográficas

Euclides (2000). *Elementos*. Madrid: Gredos.

Gardies, J. (1997). *L'organisation des mathématiques grecques de Théétète à Archimede*. Paris: Vrin.

21 Desde luego que para apreciar cabalmente nuestra interpretación, invitamos al lector a seguir la demostración de esta proposición VI-31 en alguna de las ediciones de los *Elementos*.

Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements [translated from the text of Heiberg]*. New York: Dover.

Hilbert, D. (1997). *Foundations of Geometry*. La Salle, Illinois: Open Court. (Obra original publicada en 1899).

The GSP as a technical and psychological-symbolic tool: The case of a lateral entry teacher

Adalira Sáenz-Ludlow[1]
Anna Athanasopoulou[2]

Este es un estudio preliminar a un experimento de enseñanza que fue llevado a cabo durante un semestre académico. Los participantes fueron un estudiante de educación matemática, una aspirante a obtener su licencia para enseñar en la escuela media a través de su práctica de enseñanza y cursos universitarios, y dos maestras, ya tituladas y enseñando en la escuela secundaria. El propósito del experimento fue tratar de entender cómo maestros, que poseen cierto conocimiento de objetos geométricos, utilizan el programa *Geometer's Sketchpad* (GSP) para expandir y consolidar dicho conocimiento. El estudio utilizó tareas semi-estructuradas especialmente diseñadas para el GSP con la intención de motivar la triada comunicativa entre el profesor, el GSP y el investigador, además de dar al profesor la libertad de explorar situaciones geométricas para generar conjeturas, investigarlas y luego probarlas. En este artículo analizamos cómo la profesora aspirante a obtener su licencia para enseñar (aquí denominada con el pseudónimo de Susan) usa el GSP para resolver una tarea cuyo objetivo fue el de investigar varias propiedades de los trapecios isósceles. El análisis muestra que Susan usó el GSP no solamente como una herramienta técnica, sino que la constituyó en una herramienta simbólica en el proceso de conceptualizar algunas de las propiedades de trapecios isósceles y la demostración geométrica de ellas.

One academic semester long pilot teaching-experiment on the learning of geometry was conducted with one pre-service teacher, one lateral entry teacher, and two in-service teachers. The purpose of the pilot teaching-experiment was to understand *how* learners, who already have some knowledge of geometric objects, are able to reorganize and broaden their knowledge when using the Geometer's Sketchpad (GSP). The guiding

1 Department of Mathematics and Statistics; University of North Carolina at Charlotte; Universidad Distrital Francisco José de Caldas
La Dra. Adalira Sáenz-Ludlow es Profesora Invitada en el Énfasis de Educación Matemática del Doctorado Interinstitucional en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia y miembro del Grupo de Investigación Interdisciplinaria en Pedagogía del Lenguaje y las Matemáticas-GIIPLyM. Correo electrónico: sae@uncc.edu
2 Department of Mathematics and Statistics; University of North Carolina at Charlotte.
Correo electrónico: aathanas@uncc.edu

principle of the teaching-experiment was to use semi-structured tasks especially designed for the GSP to foster the three-way-interaction among the student-teacher, the GSP, and the teacher-interviewer. The objective of each task was to allow each participating student-teacher the freedom to explore geometric situations, to make conjectures, and to prove them. In this article, we analyze *how* the lateral entry teacher, here with the pseudonym of Susan, solved a task which purpose was to investigate isosceles trapezoids and some of the properties. The analysis indicates that Susan used the GSP as a technical tool but also constituted it into a psychological-symbolic tool in the process of conceptualizing and proving some of the properties of isosceles trapezoids.

The GSP as a mediational tool

Several research studies (among others Mariotti, 2000; Jiang, 2002; Christou, Mousoulides, Pittalis, and Pitta-Pantazi, 2004; De Villiers, 2004) have demonstrated that dynamic geometry environments *mediate* between the learners' physical actions and their conceptualizations. Now, the first question in front of us is if the GSP is *per se* a mechanical tool mediating and guiding the thinking of the user or/and if the user comes to act on the tool according to her/his own conceptualizations. The other question is if the GSP changes the nature of the interaction between the teacher and the students making it triadic and more meaningful. The analysis presented here indicates that the GSP fosters a triadic communication among the learner, the tool and the teacher-interviewer, and that such communication greatly enhances the learner's conceptualization of geometric objects. We first argue, from a theoretical perspective, that the GSP, like any other dynamic geometry environment, is not only a technical tool but it is also a symbolic or psychological tool. Through the analysis, then, we document that with the aid of the teacher-interviewer, Susan transformed this tool into a psychological-symbolic tool to serve her conceptualizing goals, and that in the process, her level of deduction evolved from incomplete and tacit to more explicit and better argued.

The concepts of *tool* and *tool mediation* are central to the vygotskian perspective on cognitive development. Vygotsky considers two kinds of tools: technical (or material) tools and psychological (or symbolic) tools. Technical tools are directed to produce a set of changes on the object(s) they are applied to. In contrast, psychological tools direct the mind and behavior of the individuals (Kozulin, 1990). What kind of tool could be a dynamic geometry environment like the GSP? The GSP –or any other dynamic geometry environment– can be considered as an amalgamation of technical and psychological tools, because it intertwines kinesthetic, visual, and conceptual activity and mediates the transformation of physical activity into conceptual activity. That is, any dynamic geometry environment has a symbolic mediatory purpose because it facilitates, for the learner, the emergence of conceptual geometric activity from his/her kinesthetic-visual activity. In other words, the GSP is a psychological-symbolic tool that induces the learner both to observe the variants and invariants of successive drawings as they are generated in the dragging process and to gain insight into the *generalized figure*, which is nothing else than the class of all drawings with the same structural properties regardless of their size and location in space (Sáenz-Ludlow and Athanasopoulou, 2008).

Vygostky points out that the principle from "action to thought" should be applied not only to the development of intelligence, but also to the functioning of intelligence (Wertsch, 1985). This principle implies, in our particular case, the use of the GSP, that there is a considerable distance between *learning how* to operate the tool to make drawings on the screen and *becoming aware* of the geometric structure of those drawings (i.e., becoming aware of the geometric figure). Drawing from Plato, Laborde (1993) made the differentiation *between drawing* and *figure; drawing* refers to the material entities on the screen (i.e., drawings as products of dynamic geometry environments) and *figure* refers to the theoretical object. Jones (2000) retakes this differentiation and explains that in terms of dynamic geometry packages, a *drawing* can be a juxtaposition of geometrical objects resembling closely the intended construction (something that can be made to "look right"). Although, *drawings* may *look like* an intended *figure* they could lack the right relationships among the constitutive elements. This can also be restated by saying that a *figure* captures the relationships between its constituent geometric objects in such a way that any drawing of the *figure* is invariant when any basic geometric object used in its construction is dragged. In other words, when the *drawing* passes the *dragging test* it becomes a concrete instantiation of the *figure* as a concept.

Something similar happens between oral and written language. A meaning could be conveyed orally, even when syntactical elements of the language are not used rigorously because all kind of gestures and voice modulation could also become meditational means. However, in written language, the same meaning cannot be conveyed if the structural elements of the language are not rigorously used. Thus, in an analogous manner, we could say that meanings in written natural language, to be conveyed properly, have to pass the *writing test*.

Hence, constructing a *drawing* (*i.e.*, an icon of a geometric figure) using the capabilities of the GSP does not necessarily entail the understanding of the structural properties of the geometric elements of the *figure* and the relationships of the actual *figure* with other geometric figures. However, certain drawings in the GSP could be *semi-structured* in the sense that, when dragged induce not only the generalization of a particular geometric figure, but also the generalization of several geometric figures. An example of a semi-structured drawing is given in Figure 1 (see this figure in the section about methodology) because, when dragged, it produces not only drawings of trapezoids but also drawings of different quadrilaterals. These *semi-structured drawings* can also be used as instructional tasks to determine which relationships among certain elements of these drawings would produce drawings of only one particular geometric figure.

Thus, conceptualizing a *figure* is, in essence, a process of de-contextualization made, possible by the dragging capability of dynamic geometric environments, among those the GSP. The passage from action to concept or in our particular case, the passage from *drawing* to *generalized figure*, is equivalent to the passage from the concrete and particular to the general and abstract. This passage is nothing else than an instance of the vygotskian *principle of de-contextualization through mediational means* (Werstch, 1985).

De-contextualization is a process whereby the meaning of signs (in this case drawings as iconic signs) becomes less and less dependent on spatio-temporal contexts (size and space location of a sequence of drawings) and more and more dependent on the structural properties of the constituent elements of those drawings (*i.e.*, the conceptualization of a *generalized figure* as a more structured sign or symbol, as Peirce calls them).

Dragging actions in the GSP generate a sequence of geometric drawings that facilitate the emergence of conjectures and insights into the formation of geometric arguments to accept or reject those conjectures. Thus, the GSP as a *technical* and *psychololological-symbolic* tool facilitates not only the passage from iconic drawings to geometric figures (as symbolic geometric objects), but it also mediates the emergence of mental processes to construct geometric arguments. In the process, the GSP facilitates a *cognitive continuity* that goes from the perception of iconic drawings to the conceptualization of symbolic figures and to the emergence of geometric arguments. This continuity is accompanied with emerging processes of abduction, induction, and deduction. The passage from p*erceiving-and-seeing* to *conjecturing-and-proving* is essential to the teaching-learning of geometry. The GSP mediates the development of the geometric reasoning of the learners, which is one of the main goals for the teaching of geometry espoused by the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM Principles and Standards, 2000).

In addition, the GSP, as a *technical* and *psychololological-symbolic tool*, not only mediates between the learner and the computer, but it also mediates the communication between the teacher and the learner. The three-way interaction between learner, computer and teacher, allows the sharing of interpretations and the discussion of ideas and it provides the teacher with opportunities to challenge students' interpretations or misinterpretations (usually called errors). Errors or misinterpretations are part and parcel of processes of learning. Leont'ev and Brousseau call our attention on this issue. They consider errors and interactions with others as essential in the continuity of sense-making in the learning process.

"Man learns from errors and still more from the successes of other people" (Leonte'ev, 1970, p. 123). "Errors are not erratic or unexpected; the error is a component of the meaning of the acquired piece of knowledge" (Brousseau, 1997, p. 82).

In fact, errors and interactions with others are stopping-to-reflect opportunities in the refining process of knowing. The GSP, as a mediating technical and psychololological-symbolic tool, re-defines the channels for discussion and communication between teacher, learners and computer, and it provides opportunities for the students to modify their interpretations and misinterpretations of geometric objects. In this interaction, learners come to refine their geometric knowledge and to become aware of their own mental actions. The re-definition of the channels of communication also implies a shift from the teacher's monologue to the student-teacher dialogue and the concomitant shift of authority from "*domination and obedience to negotiation and consent*" (Amit and Fried, 2005, p. 164). This new way of looking at the student-teacher communication also shifts the conceptual agency of the teacher to the conceptual agency of the student by transforming students' participation on their own learning from *passive* to *active*. That is, the GSP makes possible a teaching-learning environment that is student-centered. Students' active participation on their own learning, contributes to transform their geometric reasoning into a habit of mind, and like any habit, it must be developed through a consistent way of reasoning in many contexts and from the earliest grades of their mathematical schooling. This is also another goal for the teaching of geometry espoused by the National Council of Teachers of Mathematics (Principles and Standards of School Mathematics, NCTM, 2000).

In summary, the GSP could be used as an effective technical and psychological-symbolic tool with the potential to promote student-centered teaching-learning styles focused on the development of independent learners that come to refine their understanding and to trust the authority of their own reasoning.

Literature review

Several research studies have concentrated on elementary and secondary school pre-service teachers to give them the opportunity to experiment by themselves ways of learning geometry using dynamic environments. Among these studies are those conducted by Mariotti, 2000; Jiang, 2002; Christou, Mousoulides, Pittalis and Pitta-Pantazi, 2004; and De Villiers, 2004. Other studies have concentrated on the geometric progress of individual students. Among these studies is that of Choi-Koh (1999).

Christou, Mousoulides, Pittalis and Pitta-Pantazi (2004) did a study with three pre-service primary school teachers. They used the GSP as a mediatory tool for the exploration of plane geometric figures. In this study, pre-service teachers explored, recognized and analyzed the properties of kites and then used these properties to construct this figure in different ways. Two of the three teachers used the property of perpendicularity of its diagonals and the third used the property of two pairs of adjacent equal sides. The researches extended the task to investigate the kind of quadrilaterals formed by connecting the midpoints of the adjacent sides of kites. The pre-service teachers conjectured that the mid-point quadrilateral was a rectangle and also were able to prove it. This study indicated that both, the GSP and appropriate guiding questions on the part of the teacher, can propel students' conceptualizations of conjectures and their proofs.

Jiang (2002) interviewed two secondary school mathematics pre-service teachers using the GSP environment and emphasizing the making of conjectures and the process of proving or disproving them. These teachers came to the realization that their students could also have a conceptual understanding on geometry, as they did, if they were given the opportunity to use this tool to explore geometric situations.

De Villiers (2004) also conducted a study with pre-service secondary-school mathematics teachers and used the GSP as a mediatory tool. In his study, pre-service teachers started with different definitions of isosceles trapezoids, proved their properties and constructed them in different ways, according to the definition. Pre-service teachers compared different constructions and manifested their preference for the axis-of-symmetry definition. Then, they were also asked to define isosceles trapezoids and explore their properties. Because of the dragging capability of the GSP, students were able to construct generalizations as well as specializations dragging vertices or line segments. The researcher indicated both, the use of the GSP and the use of structured activities, at corresponding Van Hiele levels, provide valuable contexts for discoveries, explanations, justifications and proofs that could be incorporated in the high-school geometry curriculum.

Choi-Koh (1999) investigated the development of a secondary-school student as he passed from the intuitive to the deduction Van Hiele levels using the GSP as a mediatory tool. This researcher indicated that by means of the GSP environment and open-ended questions on the part of the teacher, the student passed from intuitive level to the analytical level, then to the inductive level, to finally achieve the deductive level. According to the report, the student used the GSP as a tool not only for verification purposes, but also for the construction of counterexamples. The report also indicated that the geometry software provided an interactive environment that mediated and shaped the student's constructions. Such an environment also fostered the student's ability to make conjectures and the improvement of his geometric thinking as he tried to solve open-ended problems prepared by the researcher.

The research studies mentioned above indicate the value of the GSP as instructional tool to establish a communication between the student and the teacher. However, for this interaction to be effective in the teaching-learning process of geometry, it is also necessary both, the guiding role of the teacher and well structured geometric tasks, appropriate to this dynamic environment and to the geometric level of the students. Mariotti (2000), for example, emphasizes the role of the teacher as fundamental to enhance the mathematical discussion to guide the evolution of student's construction of geometric meanings in a dynamic environment. Choi-Koh (1999) emphasizes the importance of the appropriateness of the tasks for the GSP environment to link both, students' intuitions and their ability to analyze geometric objects in order to generate conjectures and to construct geometric proofs.

Methodology

Teaching-experiment

The teaching-experiment methodology is based on long-term interaction between teacher and students to follow their conceptual evolution and cognitive manifestations (Steffe, 1980; Cobb and Steffe, 1983). This pilot teaching-experiment focused on teachers' conceptions of geometric objects, the construction of those objects using the GSP, their ability to make conjectures and to prove them. Two researchers conducted the experiment; one was the teacher-interviewer, and the other, the active participant observer. We followed two guiding principles: (a) the use of semi-structured tasks for the GSP environment; and (b) the indirect but guiding role of the teacher-interviewer by means of open-ended questions that gave learners the freedom to explore, to make conjectures, to investigate them and to prove them. All the tasks for the pilot study were prepared before hand and some of them were re-designed according to the geometric needs of the students.

Given the central role that congruence and similarity concepts play in euclidean geometry, special attention was paid to congruence and similarity of triangles at the beginning of the study, to make sure that the participating teachers understood the criteria for congruence and similarity and their implications.

This pilot teaching-experiment lasted one academic semester with one pre-service middle school teacher, one lateral entry middle school teacher and two in-service high school teachers. Twenty one (21) one-to-one interviews were conducted; teachers were interviewed on a weekly basis and each interview lasted, on the average, 90 minutes. Here we analyze one interview with the middle school lateral entry teacher (with the pseudonym of Susan) that lasted 120 minutes.

A semi-structured task

In the GSP dynamic environment, the given task presented the semi-structured drawing ABCD with ABIICD (Figure 1).

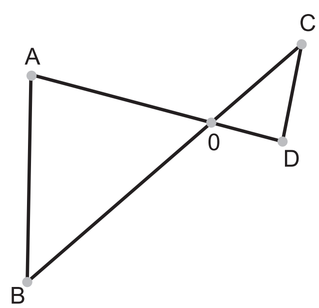


Figure 1. Semi-structured drawing ABCD with ABIIC

Dragging vertices or sides of this drawing leads to the formation of drawings of different quadrilaterals. The purposes of the task were (a) to *drag* vertices and sides of the given drawing to observe *which* kinds of quadrilaterals could be observed; (b) to investigate *how* the given drawing could be transformed into an isosceles trapezoid; (c) to investigate and prove properties of isosceles trapezoids; and (d) to investigate *how* the knowledge of these properties could be useful in the transformation of the given drawing into an isosceles trapezoid. Here we analyze only the part of the interview that is relevant to isosceles trapezoids.

Analysis

Initial state of Susan's knowledge about isosceles trapezoids

Susan recognized the obvious triangles OAB and OCD in Figure 1, and also a trapezoid if one were to connect the segments AC and BD. She knew that a quadrilateral with only one pair of parallel sides was a trapezoid. The following question asked was about what types of trapezoids she knew, and she answered "*isosceles trapezoids*". She also took as well known facts that isosceles trapezoids have the pair of non-parallel sides congruent, its diagonals congruent and the two pairs of base angles congruent, and she used these facts, as if they were definitions. She did not differentiate between the definition and the properties of isosceles trapezoids. It is also important to note that Susan knew how to use the measuring capability of the GSP and she had the tendency to give justifications congruence of segments by measuring their lengths and congruence of triangles by measuring their areas. She seemed to have not used the GSP for purposes of exploration. It could be said that Susan was at level 1 of the Van Hiele model (i.e., level of analysis). At this level, the learner is able to recognize some properties of the figure, although the interrelationship between the definition of a figure and its properties appears not to be there and neither is the conceptual organization of those properties to draw conclusions about similarities and differences of a given figure with respect to other geometric figures.

Constructing isosceles trapezoids from a semi-structured drawing

The teacher-interviewer probed Susan's knowledge about isosceles trapezoids and challenged her to construct an isosceles trapezoid using the given drawing (Figure 1). Her very first reaction was to measure the non-parallel sides AC and BD but immediately she switched into the equality of diagonals and measured them. Although, Susan described at once two properties of isosceles trapezoids (congruent diagonals and congruent non-parallel sides), she was not able to apply any of them to transform the given trapezoid into one that were isosceles. In the beginning, she dragged different vertices and segments unsuccessfully. She soon abandoned this strategy and decided to construct an isosceles trapezoid from scratch, using what she called the *"mirror method"*. She said that she used this method for constructing isosceles trapezoids in a project she did at the school. She took some moments to bring the construction to memory.

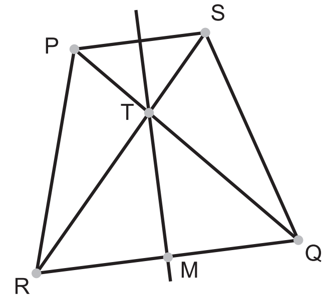


Figure 2. Two line segments with a common vertex, *PM* and *RM*

Then, Susan constructed her own figure. She started from two line segments with a common vertex, $\overline{PR}$ and $\overline{RM}$ (Figure 2). Then she constructed a perpendicular line on $\overline{RM}$ at point M and using the GSP she "mirrored" these two segments over this perpendicular line. She completed the construction of the isosceles trapezoid joining points P and S (Figure 2). She continued constructing the diagonals and she *measured* them. Tabulating the measures on the screen, she dragged the vertices of her isosceles trapezoid to verify that the diagonals were always equal. This, of course, was the case because she had constructed a robust figure. However, she had no confidence in the properties of the figure although she made the assertion since the beginning that the diagonals of isosceles trapezoid were congruent. Not being able to construct isosceles trapezoid using what she knew about them, indicates that her knowledge was based on rote memory. Skemp's (1987) would describe this knowledge as instrumental but not relational. This instrumental knowledge led us to hypothesize that she was at the level of analysis (level 1) of the Van Hiele model.

Regardless of being able to use the "mirror method" to draw isosceles trapezoids, Susan was not aware of the geometric principals behind this construction (*i.e.*, the bases of isosceles trapezoids have a *common perpendicular bisector* and this perpendicular bisector could be used as a *mirror* or axis of symmetry). If she had known this property and its meaning, she could have constructed the "mirror" she needed by constructing the common perpendicular bisector to the two bases of the trapezoid into Figure 1 and transform it into an isosceles trapezoid. This illustrates that manipulating *drawings* on the screen does not necessarily mean that the properties of a geometric *figure* are understood as the essential characteristics of that figure. It also illustrates that the GSP can be used *only* as a technical tool rather than as a psychological-symbolic tool to put the *drawings* under the conceptualizing lens of the user.

Proving that when trapezoids are isosceles, they have congruent diagonals

When Susan verified the congruence of the diagonals by dragging any vertex of the isosceles trapezoid she constructed (Figure 2), the teacher-interviewer pushed her to jump into the following step to prove the congruence of them. That is, Susan had to prove that "*if a quadrilateral is an isosceles trapezoid, then its diagonals are congruent*". She expressed her thoughts as follows.

> *45.* **Susan**: *Ok and I am going to color the triangles PTR and STQ just to color them. So these two triangles –triangles PTR and STQ– are congruent* [she gives no justification][3]. *Ok so that means again I know that the length of RT would be equal to the length of TQ and the diagonal RS can be RT plus TS, and the diagonal PQ can be PT plus TQ. RT is equal to TQ or the length of RT equal to the length of TQ, and the length of ST is equal to PT. So, that would make those two diagonals [*RS and TQ*] congruent* (Figure 3).

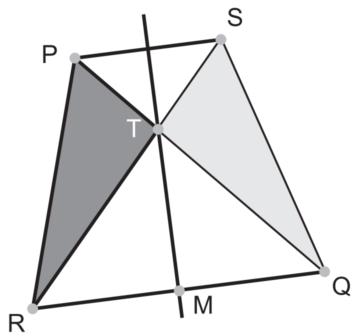


Figure 3. Those two diagonals [RS and TQ] congruent

Obviously, Susan did not prove the congruence of the triangles she focused on. In reality, there were not enough elements to argue the congruence. In addition, she did not use the fact that the trapezoid was isosceles. Probably, the assertion that triangles PTR and STQ were congruent was based on her assumption, that when the trapezoid is isosceles, the point of intersection of the diagonals (point T) lies on the perpendicular bisector of the two bases. In order to use this assumption in the proof, it is necessary to construct a geometric argument to prove that this is the case in isosceles trapezoids. It also

3 Brackets are used for clarification.

seems interesting that although the question was to prove that the diagonals were congruent, Susan concentrated on the parts of the diagonals determined by their point of intersection T. When she was asked for the justification of the congruence of the triangles PTR and STQ, she proposed to measure their areas without being aware that two triangles could have the same area and still not be congruent. This is another instance in which Susan's persistence on measuring as a way of "proving" indicates her use of the GSP only as a technical tool rather than as a psychological-symbolic tool to achieve particular geometric objectives.

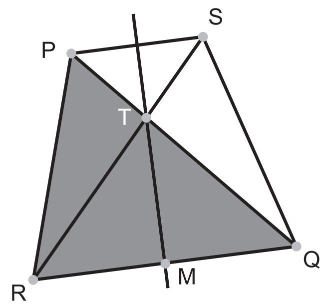


Figure 4

Then the teacher-interviewer requested a proof in which measurement were not involved. Susan continued the analysis of the figure by considering point M as the midpoint of RQ (the midpoint created by the mirror) and making TM the perpendicular bisector of RQ in order to conclude that TQ was congruent to TR. When the teacher-interviewer asked her *how* she knew that point T (the intersection of diagonals) was <u>*on*</u> the perpendicular bisector, Susan was confused. For this reason, the teacher-interviewer decided to ask her *how* many triangles she could see in her drawing and to show them. Susan needed to understand that she had to compare the triangles PRQ and SQR because the sides PQ and SR were the diagonals of the isosceles trapezoid.

> 88. **Susan**: *Ok, so I am looking at PRQ and SRQ… it's cool. Oh! I get it; the light bulb just went on in my head. All right, so ΔPRQ and ΔSQR are congruent by side-angle-side (SAS). PR=SQ. $\angle PRQ = \angle SQR$, and RQ=RQ. Thus, the sides PQ and SR are congruent.*

We should observe that Susan did not explicitly argued that PR=SQ because they are the non-parallel sides of a trapezoid that was isosceles. She asserted that $\angle PRQ = \angle SQR$ because she also took as a definition of isosceles trapezoids those trapezoids which simultaneously have base angles congruent and non-parallel sides congruent. This was probably an inference of her mirror-construction of isosceles trapezoids. She did not specify either that the sides PQ and SR, in this case also diagonals of the trapezoid, were congruent as an implication of the congruence of the triangles. In other words, her proof was encrypted and incomplete. This may be due to her lack of differentiation between definition and properties as well as between the necessary elements for congruence and the implications of that congruence. Therefore, the above proof indicates that Susan was at the informal level of deduction. In what follows, the teacher-interviewer continued to challenge her deductive reasoning.

Since Susan's first idea was to compare the small triangles PTR and STQ, the teacher-interviewer took the opportunity to ask her to prove the congruence of these triangles. Susan considered the congruence of angles RPQ and RSQ as an implication of the congruence of the triangles PRQ and SRQ that she had just completed. She asserted that the vertical angles PTR and STQ were congruent and that the sides PR and SQ are congruent because the trapezoid was isosceles. Then she said that these elements were not enough to apply the ASA criterion. It was clear that she was not able to make the connection with the sum of the angles of a triangle being 180° in order to use the angle-side-angle criterion of congruence. Her instrumental understanding came up one more time. Once the teacher-interviewer helped Susan to see the relationship among the angles, she wrote the proof of the congruence of these triangles. She also wrote that TR=TQ and TP=TS as implications of this congruence. Taking into account the equality of these sides, she concluded that point T, intersection of the diagonals, was <u>on</u> the perpendicular bisector of the bases in isosceles trapezoids. Therefore, Susan had proven that "*if a trapezoid is isosceles, the point of intersection of the diagonals lies on the perpendicular bisector to both bases*."

The teacher-interviewer prompted Susan to summarize the properties of isosceles trapezoids she knew up to now.

424.	**Interviewer:**	Now, what do we know about the properties of isosceles trapezoids?
425.	**Susan**:	With the…
426.	**Interviewer**:	A property or properties of isosceles trapezoids.
427.	**Susan**:	The whole…
428.	**Interviewer**:	From the definition to the properties, what do you know?
429.	**Susan**:	In order for a trapezoid to be isosceles, the diagonals have to be equal and also their intersection should lie on the perpendicular bisector of the bases.

The way Susan worded her conclusions (line 429) indicates she did not clearly recognized that in the statements she proved, the given (*i.e.*, the sufficient condition) was that the trapezoid was isosceles, and what needed to be proved (i.e., the necessary conditions) were: (a) that the diagonals were congruent, and (b) that the point of intersection of the diagonals lies on the perpendicular bisector of both bases. This indicates, once again, that although Susan was making some progress she was still at the analysis level (level 1) of the Van Hiele model.

In what follows, the teacher-interviewer asked Susan to prove the converses of the above propositions. First the teacher-interviewer asked Susan to prove that "*if the diagonals of a trapezoid are congruent, then the trapezoid is isosceles*". Susan wrote the statement on the GSP and proceeded to think about the proof.

Proving that if the diagonals in a trapezoid are congruent, it is an isosceles trapezoid

The teacher-interviewer wanted Susan to differentiate between the sufficient and necessary conditions of a geometric proposition. The teacher-interviewer inferred that a good way to do it was to ask her to prove the converse of the proposition she had proved (i.e., if the trapezoid is isosceles, then the diagonals are congruent). Susan remained surprised and silent for a moment. It seems as if such a proposition was something strange in Susan's mind because since the beginning she also took as definition of isosceles trapezoids those trapezoids with congruent diagonals. While she worked on this proof, she was fluctuating between the levels of analysis, informal deduction, and deduction in the Van Hiele model. She struggled trying to understand what she had to prove and finally she decided to construct a new figure with two equal diagonals forming a quadrilateral. Then she realized that such a quadrilateral was not a trapezoid. At that point the teacher-interviewer clarified for her that the *given was* that the *diagonals in a trapezoid were congruent* and therefore she had to prove that under this condition the trapezoid would be isosceles. Susan abandoned the quadrilateral with the equal diagonals and made the drawing in Figure 5.

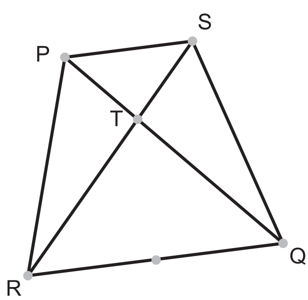


Figure 5. A monologue comparing the big triangles PQR and SQR

Looking at Figure 5 she started a monologue comparing the big triangles PQR and SRQ and explained to herself that the triangles had only two sides congruent and there was no information about angles. Susan could not figure out how to prove it and she was repeating that "*if the diagonals in a trapezoid are equal, then the trapezoid would be isosceles*". Then the teacher-interviewer guided her to figure out that what she needed was to construct *right triangles* to overcome the difficulty of the lack of angles. This was a crucial hint that Susan played with and thought for a while. Finally, she constructed the appropriate perpendicular lines forming the rectangle RVUQ which simultaneously determined the right triangles RVS and QUP as well as the right triangles RVP and QUS (Figure 6).

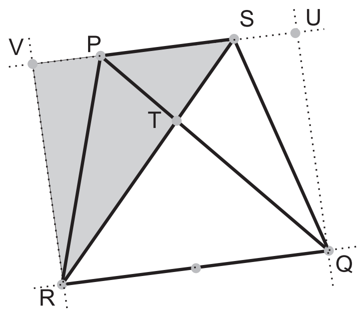


Figure 6. The appropriate perpendicular lines forming the rectangle RVUQ

After this construction, she proved that triangle RVS is congruent to triangle QUP using the congruence of the diagonals (RS=PQ) and the congruence of the sides RV and QU (RV=QU) due to the fact that perpendicular segments between parallel lines are equal. She stated that one of the implications of this congruence was the congruence of VS and UP (VS=UP). She used this implication to prove that the right triangles RVP and QUS were congruent. She took the time to justify the equality of the segments VP and SU. She wrote, "*VP=SU since VS=VP+PS and PU=PS+SU and VS=PU*". Then she noticed that she had enough elements to justify the congruence of the other pair of right triangles RVP and QUS because "*VR=UQ and VP=SU*". As an implication of this congruence, she concluded that PR was congruent to SQ and, therefore, the trapezoid was an isosceles trapezoid because the non-parallel sides were congruent. After the hint was given to Susan to use an auxiliary construction to introduce right triangles, she took off with the proof. Her reasoning in this proof indicates that, with the assistance of the teacher-interviewer, she could move up to the deductive level (level 3) of the Van Hiele model.

Proving the converse of the proposition that when the trapezoid is isosceles, the intersection of its diagonals lies on the perpendicular bisector of the bases

The teacher-interviewer wanted to know, at this point, how stable Susan's deductive level was. Thus she stated the following proposition and Susan wrote it on the GSP: *"if the intersection of the diagonals lies on the perpendicular bisector to one of the bases of a trapezoid, then the trapezoid is an isosceles trapezoid"*. Susan was made aware that she had proven the converse of this proposition before and was asked to state that proposition. She said: *"if a trapezoid is isosceles, the intersection of the diagonals lies on the perpendicular bisector of its bases"*. This time, Susan stated it correctly. This indicates her awareness of the differentiation between sufficient and necessary conditions. Then, she was asked to prove the converse of that proposition here stated by the teacher-interviewer.

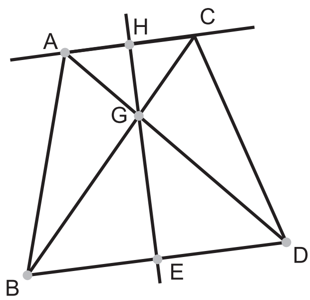


Figure 7. Triangle GEB is congruent to triangle GED

Susan constructed Figure 7 and proved that triangle GEB is congruent to triangle GED giving the following argument. "*GE=GE, BE=DE just because it's the midpoint, and then BG=DG they are hypotenuses of these right triangles (Pythagorean theorem)*". Then, she proved that ΔAGH is congruent to ΔCGH giving the following argument.

> *∠AGH=∠CGH because ∠AGH=∠EGD vertical angles, ∠CGH=∠BGE vertical angles; but I know that ∠BGE =∠DGE as an implication of the congruent triangles GED and GEB. I also know that HG=HG and angles GHA and GHC are right angles because BD is parallel to AC and EH is perpendicular to BD. Then, the right triangles AGH and CGH are congruent. Then, an implication is that GA=GC.*

Finally, Susan explained that the point G is equidistant from points A and C, and therefore, G lies on the perpendicular bisector of AC. So AG + GD=CG + GB, this means that AD=CB. Therefore, in the trapezoid ABDC, the diagonals AD and CB are congruent, making it an isosceles trapezoid.

The teacher-interviewer continued the testing Susan's deductive level and she requested one more proof of the same proposition. Susan used the copy and paste facility of the GSP and she produced Figure 8. Then she said:

> *Knowing that point G lies on the perpendicular bisector of BD, then triangle GBD is an isosceles triangle with congruent base angles. Since AC is parallel to BD, it implies that the alternate interior angles are congruent, and therefore, triangle GAC is isosceles too. Thus G is on the perpendicular bisector of AC. Then, the corresponding sums of the parts of each diagonal are congruent (i.e., the diagonals are congruent) and the trapezoid is isosceles.*

It was not clear if Susan was using the proposition she had proved before or if she used the property of the equality of the diagonals as a definition of isosceles trapezoids. Her proof did not specify the reason.

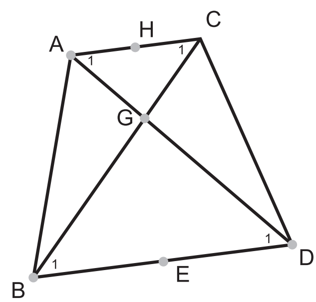


Figure 8. The copy and paste facility of the GSP

It was interesting that Susan offered one more proof of the proposition without a request for doing so. She went further and proved that triangles GBA and GCD were congruent by SAS. At the beginning of the interview, she wanted to prove that these triangles were congruent, but in that occasion she did not have the geometric conditions to support the argument. This time, she gave the following argument: "*I just proved that AG=GC, GD=GB and the vertical angles ∠AGB=∠CGD. Then, by SAS, triangle GBA and triangle GDC are congruent. Therefore, AB is congruent to CD and the trapezoid is an isosceles trapezoid*". Here Susan used the definition of isosceles trapezoids as trapezoids with non-parallel sides congruent. When she finished, she smiled and said "*I did it*".

Susan's last proofs indicate that, with the guidance of the teacher-interviewer, she could move between different Van Hiele levels. It was a continued effort for two hours, but in the process Susan was learning how to use the GSP not only as a technical tool, but also as a psychological-symbolic tool to direct her conceptual activity. The fact that she was now able to correctly state the proposition *"if a trapezoid is isosceles, the intersection of the diagonals lies on the perpendicular bisector of its bases"*, which she had stated incorrectly before, and at the same time she was now able to prove its converse as stated by the teacher-interviewer (*"if the intersection of the diagonals lies on the perpendicular bisector to one of the bases of a trapezoid, then the trapezoid is an isosceles trapezoid"*) indicates that Susan have started to consolidate her deductive level. However, it was not clear whether or not she was aware of the differentiation between definition and properties of isosceles trapezoids; differentiations that would be of great assistance in the development of her geometric thinking.

At the end, the teacher-interviewer asked Susan what she could do, at this point, to transform Figure 1 into an isosceles trapezoid. Susan said *"I would draw the perpendicular bisectors of the bases and drag points or segments to make the intersections of the diagonals go on the perpendicular bisectors."* Susan has gotten the idea although she was too tired to actually do it. However, her answer indicates that now she was able to use the GSP as a psychological-symbolic tool.

Concluding remarks

From the analysis of the interview, we could say that Susan first experienced the GSP geometric environment only as a technical tool to measure and to draw segments. Then, guided by the teacher-interviewer's indirect hints and questions, she started to use the GSP as a psychological-symbolic tool to deepen her knowledge about the properties of isosceles trapezoids. The GSP provided her with opportunities to make dynamic constructions and it also fostered her ways of thinking and means of arguing geometric proofs. That Susan first used the GSP as a technical tool was illustrated when she argued the congruence of segments and triangles by either measuring their lengths or their areas. However, with the guidance of the teacher-interviewer, she came around to use the GSP as a psychological-symbolic tool to direct her geometric explorations and her ways of arguing geometric proofs about properties of isosceles trapezoids. This indicates that while the GSP is, by nature, a technical tool that facilitates the production of clean drawings (whether or not they satisfy the necessary conditions to pass the dragging test), this tool also has the potential of being transformed, by the learner, into a psychological tool to facilitate the exploration of geometric drawings and the formation of geometric arguments.

At the beginning of the interview, it seems that Susan had only an instrumental understanding of some properties of isosceles trapezoids because she could not transform the trapezoid in Figure 1 into an isosceles one. Susan had also different definitions of isosceles trapezoids because she considered their properties also as definitions or combined them according to need. For example, one definition she used was that isosceles trapezoids have the non-parallel sides equal and the pairs of base angles congruent. Another definition she used was that isosceles trapezoids are those with equal diagonals. In addition, the property that relates the intersection of the diagonals of isosceles trapezoids and the perpendicular bisector of the bases was unknown to her. The teacher-interviewer guided her to arrive at this property. Midway through the interview, she was able to give a proof of the property that states that "*if a trapezoid is isosceles, the intersection of the diagonals lies on the perpendicular bisector of its bases*". Since she arrived to this property directed by the guidance of the teacher-interviewer, it was not surprising that she summarized her findings in the following terms: "*In order for a trapezoid to be isosceles, the diagonals have to be equal and also their intersection should lie on the perpendicular bisector of the bases*". In this statement, Susan indicated two issues about her understanding. First, that she could not separate the two properties of the diagonals of isosceles trapezoids; one referring to the equality of the diagonals, the other referring to the relationship between the intersection of the diagonals and the perpendicular bisectors of the bases. Second, that she was unaware of the sufficient and necessary conditions of the statement she had proved. She failed to recognize that the sufficient condition for her proof was that the trapezoid was isosceles. For this reason, by the end of the interview, the teacher-interviewer carefully stated the converse of the property Susan had proved but had incorrectly stated. The teacher-interviewer asked Susan to prove that "*if the intersection of the diagonals lies on the perpendicular bisector of one of the bases of a trapezoid, then the trapezoid is an isosceles trapezoid*". After Susan completed the proof of this statement, the teacher-interviewer challenged her to give another proof of the same proposition. Susan's improvement was manifested when she was able to generate two more proofs for the same statement. This improvement was also the result of a triadic interaction among Susan, the teacher-interviewer and the GSP. In addition, Susan's later monologues indicated that the GSP mediated the formation of her geometric arguments as she acted and reacted upon her drawings. Thus, she used the GSP as a psychological-symbolic tool.

The GSP also provided the teacher-interviewer with opportunities to make hypotheses about Susan's line of reasoning and to challenge her through indirect questioning. Without the GSP, it would have been difficult to understand Susan geometric assumptions since, most of the time, her arguments were tacit and incomplete. Appropriate questioning on the part of the teacher-interviewer, mediated by the GSP, helped the lateral entry teacher to refine her previous knowledge about isosceles trapezoids and to investigate a property of isosceles trapezoids that was unknown to her. The analysis also indicates that, little by little, this lateral entry teacher investigated several of the properties of isosceles trapezoids constructing different drawings and exploring them in the GSP environment. In her proofs, she used her previous knowledge about the congruence of triangles and the relationships among the angles formed between parallel lines intersected by a transversal. Once Susan had a good understanding of the property of isosceles trapezoids relating the intersection of the diagonals to the perpendicular bisector of the bases, she was able to verbalize how she would transform Figure 1 into an isosceles trapezoid.

During the months of the teaching-experiment, the GSP became a useful tool to explore questions and to interact with the participating teachers. That is the communication was triadic among the student-teacher, the GSP and the teacher-interviewer. In other words, the GSP made more meaningful the interaction between the teacher-interviewer and the student-teacher. The effectiveness of this dynamic environment depended not only on the careful designed of geometric tasks, but also on the teacher-interviewer's ability to make hypotheses about the conceptual needs of the student-teacher to anticipate and guide the line of questioning. We concur with Mariotti (2000), Jones (2000) and Arzarello et al. (2002), that educational change on the teaching and learning of geometry happens not only because of the software but also because of the teacher's engagement in helping students attain a level of theoretical thinking (deductive level) in the study of geometry. Nonetheless, this engagement of teachers with students will become a reality only when teachers themselves have gone through geometric learning experiences that involve geometric environments like the GSP and learn to use these environments not only as technical tools, but also as psychological-symbolic tools to establish and achieve geometric goals.

References

Amit, M. and Fried, M. (2005). Authority and authority relations in mathematics education: a view from and 8th grade classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 145-168.

Arzarello, F.; Olivero, F.; Paola, D. and Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 34 (3), 66-72.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Choi-Koh, S. S. (1999). A Student's learning of geometry using the computer. *The Journal of Educational Research*. 92 (5), 301-311.

Christou, C.; Mousoulides, N.; Pittalis, M. and Pitta-Pantazi, D. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *Proceeding of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Bergen-Norway, 2, 215-222.

Cobb, P. and Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(2), 83-94.

Davis, W. H. (1972). *Peirce's epistemology*. The Hague: Martinus Nijhoff.

De Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 35 (5), 703-724.

Fuys, D.; Geddes, D. and Tischler, R. (1988). *The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents*. Monograph No. 3 of the Journal for Research in Mathematics Education. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Jiang, Z. (2002). Developing preservice teachers' mathematical reasoning and proof abilities in the geometer's sketchpad environment. *Proceedings of the Annual Meeting [of the] North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 2, 717-729.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretations when using Dynamic Geometry Software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*. 44 (1), 55-85.

Kozulin, A. (1990). *Vygotsky's psychology: a biography of ideas*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Laborde, C. (1993). The computer as part of the learning environment: the case of geometry. In: C. Keitel and K. Ruthven (Eds.). *Learning from computers: Mathematics education and technology.* Berlin: Spring Verlag.

Leont'ev, A. A. (1970). Social and natural in semiotics. In: J. Morton (Ed.). *Biological and social factors in psycholinguistics*. Urbana: University of Illinois Press.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a Dynamic Software Environment. *Educational Studies in Mathematics*. 44 (1), 25-53.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school Mathematics: an overview*. Reston, Virginia.

Sáenz-Ludlow, A. and Athanasopoulou, A. (2008). The GSP as a technical-symbol tool. In: Radford, Schubring and Seeger (Eds.). *Semiotics in Mathematics Education*, 195-214. Rotterdam: Sense Publishers.

Steffe, L. P. (1980). The teaching experiment methodology in a constructivist research program. Paper presented at the Fourth *International Congress on Mathematical Education* (ICME), Berkeley: California.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. New Jersey: Laurence Erlbaum Associates.

Wertsch, J. V. (1985). *Vygotsky and the social formation of the mind*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Reseña de autores

Bruno D'amore

Nació en Bolonia (Italia). Graduado en Matemática, Filosofía y Pedagogía, PhD en Educación matemática. Enseña didáctica de la matemática en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Bolonia y en las facultades de Ciencias de la Formación de las Universidades de Bolonia, de la Libre Universidad de Bolzano y de la Alta Escuela Pedagógica de Lorcano, en Suiza.

Es responsable científico del Núcleo de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Bolonia, director de diferentes colecciones de libros para varias editoriales y autor de más de ochenta libros sobre matemáticas.

Juan Díaz Godino

Nació en Jaén en 1947. Comenzó la licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Granada y la terminó en la Universidad Complutense de Madrid en 1971, en la especialidad de astronomía y geodesia. Trabajó en la industria como estadístico durante varios años y cursó estudios de Diplomado Superior en Estadística, finalizando su tesis doctoral en 1982 en el Departamento de Estadística de la Universidad de Granada.

Desde 1993 viene desarrollando un marco teórico específico sobre el conocimiento y la instrucción matemática que está siendo reconocido a nivel internacional a través de publicaciones en las principales revistas del área de conocimiento (*Educational Studies in Mathematics, Recherches en Didactiques des Mathématiques, For the Learning of Mathematics, The International Journal on Mathematics Education*, etc.). Una selección de sus trabajos está disponible en la página web del grupo: http://www.ugr.es/local/jgodino (Tomado de: http://www.ugr.es/~jgodino/rese%F1a_cv.pdf)

Dora Inés Calderon

La profesora Calderón (Colombia) es Licenciada en Español de la Universidad Pedagógica Nacional-UPN, Doctora en educación de la Universidad del Valle con la tesis *Dimensión cognitiva y comunicativa de la argumentación en matemáticas*. También es Magister en Lingüística Española del Instituto Caro y Cuervo con el trabajo *Glosario en Terapia Ocupacional*.

Entre sus líneas de investigación encontramos: Argumentación en lenguaje en el aula; Lenguaje y construcción de conocimiento (matemático); Didáctica del lenguaje (y las matemáticas); Procesos semióticos en lectura y escritura (y geometría).

Pertenece al Grupo de Investigación Interdisciplinaria en Pedagogía del Lenguaje y las Matemáticas, GIIPLyM, aprobado por Colciencias en categoría A. Es docente investigadora titular del énfasis de lenguaje del Doctorado Interinstitucional en educación, DIE, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Actualmente es Coordinadora del proyecto ALFA III de la Universidad Distrital en convenio con la Unión Europea.

Carlos Eduardo Vasco Uribe

El profesor Vasco (Colombia) es Doctor en Matemáticas y Magister en Física de Saint Louis Univerity. Licenciado en Filosofía y Letras de la Pontificia Universidad Javeriana. Docente durante 25 años en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, en Bogotá, del cual es Profesor Emérito.

Es Investigador visitante de manera permanente en la Universidad de Harvard. Coordinó en los años 1993 y 1994 la Misión de Ciencia, Educación y Desarrollo, llamada popularmente "La Comisión de Sabios".

Ha sido Asesor del Ministerio de Educación Nacional en el proceso de elaboración de los programas curriculares de matemáticas de 1978 a 1993 y los Estándares Básicos de Competencias 2001. Animador del proceso de conformación del Segundo Plan Decenal de Educación 2006-2016.

Docente en el programa de Doctorado en Educación de la Universidades del Valle y Distrital de Bogotá.

Olga Lucía Leon

La Doctora Leon (Colombia) es profesional en Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá. También es Magister de la misma Universidad. Es doctora en educacion de la Universidad Del Valle con la tesis *Experiencia figural y procesos semanticos para la argumentación en geometría*.

Sus líneas de investigación son: Argumentación en lenguaje y matemáticas en el aula; Lenguaje y construcción de conocimiento matemático; Didáctica del lenguaje y las matemáticas; Procesos semióticos en Geometría.

Ha sido ponente en diferentes eventos nacionales e internacionales y ha publicado un gran numero de libros y artículos de revistas.

Pertenece al Grupo de Investigación Interdisciplinaria en Pedagogía del Lenguaje y las Matemáticas, GIIPLyM, aprobado por Colciencias en categoría A. Es docente investigadora titular del énfasis de matematica del Doctorado Interinstitucional en educación, DIE, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Actualmente es Coordinadora del proyecto ALFA III Universidad Distrital en convenio con la Unión Europea.

Adalira Saenz-Ludlow

La Doctora Adalira (Colombia) es Licenciada en Matemáticas y Física de la Universidad Pedagógica Nacional–UPN de Colombia. Es Doctora en Educación Matemática de la Universidad de Georgia con el trabajo *Esquemas de los niños de fracciones: Una elaboración de su número de secuencia*. También es Magister en Ciencias Matemáticas de la Universidad Estatal de Nueva York.

Entre sus líneas de investigación se encuentran: Argumentación en Lenguaje y matemáticas; Lenguaje y construcción de conocimiento matemático; Didáctica del lenguaje y las matemáticas.

Actualmente es investigadora del Grupo de Investigación Interdisciplinaria en Pedagogía del Lenguaje y las Matemáticas, GIIPLyM, aprobado por Colciencias y adscrito a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Carmen Batanero

Nació en Sevilla, España, y actualmente vive en Palma de Mallorca, ciudad donde ha pasado la mayor parte de su vida.

Licenciada en Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid. PhD en Matematicas de la Universidad de Granada en el Departmento de estadistica.

Actualmente labora en el Departamento de educación matematica de la Facultad de Ciencias de la Educación en la Universidad de Granada, España, donde también coordina el Grupo de investigación sobre educación estadística. Entre sus diferentes líneas de investigación se destaca la didáctica de la matematica.

Vicenç Font Moll

Es Doctor en Filosofía de las ciencias de la educación de la Universitat de Barcelona, (2000). Miembro del Grupo de Investigación Consolidado Enseñanza y Aprendizaje Virtual (Plan de Investigación de Cataluña). Profesor titular de la Facultad de Formación del Profesorado en el Departamento de la Didáctica de las Ciencias Experimentales y la Matemática de la Universitat de Barcelona.

Se destacan sus investigaciones sobre la Enseñanza y aprendizaje virtual, como también sus investigaciónes sobre Evaluación y desarrollo de competencias profesionales en matemáticas y apoyo didáctico en la formación inicial de profesores de secundaria, auspiciado por el Programa Nacional de Investigación Fundamental del Ministerio de Ciencia e Innovación del Gobierno de España.

Ha escrito innumerables artículos, libros y capítulos de libros.

Carlos Álvarez Jiménez

El profesor Jiménez es doctorado en Filosofía de la Universidad de Picardie, Francia. Es Magister en Matemáticas de la Universidad Nacional Autonoma de Mexico. También es Licenciado en Matemáticas de la misma universidad.

Actualmente es profesor de carrera titular B en el Departamento de matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Entre sus líneas de investigación se destacan la Historia de la matemática e Historia y filosofía de las matemáticas, teoría de conjuntos, geometría y análisis.

Anna Athanasopoulou

La profesora Anna Athanasopoulou es Doctora en enseñanza de las matemáticas de la Universidad de Carolina del Norte en Charlotte.

Actualmente es profesora del Departamento de Matemáticas y estadística en la misma Universidad.

Perspectivas en la didáctica de las matemáticas / Anna Athanasopoulou...
[*et al*.]. -- Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2012.
188 p.;   cm.
ISBN 978-958-8782-09-6
1. Matemáticas - Enseñanza - Metodología 2. Matemáticas - Problemas, ejercicios, etc. 3. Teoría de los números I. Athanasopoulou, Anna.
510.7 cd 21 ed.
A1357959

CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

UD Editorial

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN UNIVERSIDAD DISTRITAL

El énfasis de Educación Matemática del Doctorado Interinstitucional en Educación de las Universidades Distrital Francisco José de Caldas, del Valle y Pedagógica Nacional, presenta a la comunidad de profesores e investigadores esta obra como un aporte a la discusión de los desarrollos de este campo intelectual.

La obra compila resultados de investigación del los grupos inscritos en la Universidad Distrital. Adicionalmente, para esta publicación se contó con la colaboración de cuatro investigadores invitados: Carmen Batanero, doctora en Matemáticas y profesora de estadística y didáctica en la Universidad de Granada (España); Vicenç Font, doctor en Didáctica de las Matemáticas y profesor en la Universidad de Barcelona; Carlos Álvarez, doctor en Matemáticas, especialista en Historia de las Matemáticas y profesor en la Universidad Autónoma de México; y Anna Athanasopoulou, doctora en Educación Matemática y profesora de matemáticas en North Carolina.

La obra tiene dos características: presenta resultados de las investigaciones realizadas en el marco de las líneas de los grupos referidos. A la vez, el conjunto de artículos compilados conforma un escenario en el que convergen distintas perspectivas en la investigación de la didáctica de las matemáticas.

La obra se estructura en dos partes: la primera dedicada a presentar Elementos generales de la didáctica de las matemáticas a través de tres artículos que, a nuestro juicio, abren el panorama de elementos epistemológicos, pedagógicos y lingüísticos que pueden contribuir a la comprensión de la educación matemática en general.

La segunda se ha denominado Elementos específicos en la didáctica de las matemáticas: experiencias para el aula. Bajo este tema se compilan tres artículos que consideramos, aportan experiencias particulares con metodologías, herramientas o propuestas para trabajar en clase.

Así pues, ponemos en consideración de la comunidad este conjunto de artículos como un espacio para la interlocución académica en torno a los problemas de la didáctica de las matemáticas.